

A resolução de equações do segundo grau com ênfase no método de completar quadrados

Jackson Moraes Pinho¹

Gilson da Silva Vernes²

Tania Elisa Seibert³

Resumo

O presente trabalho busca apresentar alguns métodos de resolução de equações do segundo grau sem o uso de fórmulas prontas. Para isso, primeiramente, faremos uma contextualização histórica, evidenciando a história da equação do segundo grau, bem como sua resolução ao decorrer da história. Encontramos na Mesopotâmia, em 1700 a.C, o primeiro registro de resoluções de problemas envolvendo equações quadráticas, nessa época as equações eram resolvidas de forma retórica, não existia ainda o simbolismo algébrico. Já na Grécia (500 a 200 a.C.), o tratamento para a resolução de equações do segundo grau era geométrico. Para expor o método geométrico de resolução utilizado na Grécia optou-se pela utilização do aplicativo *GeoGebra* disponível para smartphones, devido a importância da utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) em sala de aula. Por sua vez, na Europa Ocidental François Viète (1540-1603) propõe a resolução da equação do segundo grau por intermédio de uma substituição algébrica, sendo possível, também demonstrar através dessa substituição a fórmula resolvente da equação do segundo grau. Por fim, na Arábia, temos o matemático *Al-Khwarizmi* (780-850) que descreve a utilização do método de completar quadrados na resolução de equações quadráticas em sua obra "*Hisab al-jabr wa'lmuqabalah*" (ciência da restauração e da redução ou ciência das equações), donde se origina a palavra álgebra usada atualmente.

Palavras-chave: Álgebra. Método de completar quadrados. História da matemática. *Al-Khwarizmi*.

Introdução

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) o estudo das equações do segundo grau deve ser iniciado no oitavo ano do ensino fundamental, com equações da forma $ax^2 = b$, com $a \neq 0$. No nono ano do ensino fundamental o estudo se expande para as equações da forma $ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. No nono ano o texto da BNCC salienta que a resolução dessas equações deve ser feita por meio do processo de fatoração. Pensando nisso, a proposta deste trabalho é apresentar

¹ Acadêmico de Matemática Licenciatura da Universidade Luterana do Brasil. E-mail: jacksonmoraespinho@gmail.com

² Acadêmico de Matemática Licenciatura da Universidade Luterana do Brasil. E-mail: vernesgs@gmail.com

³ Professora do curso de Matemática Licenciatura da Universidade Luterana do Brasil. Doutora em Ensino de Ciências e Matemática. E-mail: tania.seibert@ulbra.br

métodos de resolução de equação de segundo grau sem o uso de fórmulas, evidenciando as técnicas geométricas e algébricas utilizadas pelos diferentes povos para resolução de equações quadráticas.

Há cerca de quatro mil anos já apareciam problemas que recaiam numa equação do segundo grau em textos escritos em placas de argila na Mesopotâmia, e em papiros no Egito. Assim fica que evidente que a matemática foi sendo construída ao decorrer da história, portanto, podemos afirmar que a matemática é um conhecimento socialmente construído, ou seja, a matemática é uma construção humana. Nesse sentido Chaquiam (2017) pondera que:

Pesquisas atuais indicam que a inserção de fatos do passado pode ser uma dinâmica bastante interessante para introduzir um determinado conteúdo matemático em sala de aula, tendo em vista que o aluno pode reconhecer a Matemática como uma criação humana que surgiu a partir da busca de soluções para resolver problemas do cotidiano, conhecer as preocupações dos vários povos em diferentes momentos e estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente (CHAQUIAM, 2017, p. 14).

Visando relacionar o estudo da álgebra com a geometria, optou-se por dar ênfase ao método de completar quadrados para resolução de equações quadráticas.

Fundamentação teórica

Segundo Domingues (2000), há cerca de 3500 a.C. antigas civilizações já resolviam problemas que podem ser, hoje, considerados como equações do segundo grau, isso mesmo antes do termo “álgebra” ser criado. O autor cita que os problemas eram resolvidos através de receitas em prosa, que ensinavam como proceder para determinar as raízes, em exemplos concretos com coeficientes numéricos, até a famosa fórmula geral de resolução. Fórmula essa, que adquiriu o aspecto que tem hoje, somente quando se generalizou o uso de letras para representar os coeficientes de uma equação, a partir dos trabalhos de François Viète (1540-1603) e de René Descartes (1596-1650).

Mohammed ibu-Musa Al-Khwarizmi (780-850) foi um matemático, astrônomo, geógrafo e historiador. É de seu nome que deriva o termo "algarismo", em português. Boyer (1974), menciona que *Al-Khwarizmi* escreveu mais de seis livros sobre matemática e astronomia, além disso, também foi responsável pela difusão de obras matemáticas hindu traduzidas por ele, como a obra *De número hindorum* (Sobre a arte hindu de

calcular), onde está muito bem detalhado o sistema de numeração hindu (utilizado hoje), que muitos atribuíram a ele a autoria deste sistema de numeração.

Al-Khwarizmi não manifesta nenhuma pretensão de originalidade quanto ao sistema, cuja origem hindu ele assume como fato; mas quanto mais traduções latinas de sua obra apareceram na Europa, leitores descuidados começaram a atribuir não só o livro, mas a numeração, ao autor. A nova notação veio a ser conhecida como a de Al-Khwarizmi, ou mais descuidadamente, *algorismi*; finalmente o esquema de numeração usando numerais hindus veio a ser chamado simplesmente algarismo ou algoritmo (BOYER, 1974, p.156).

Segundo Boyer (1974) a principal obra de *Al-Khwarizmi* tem como título *Al-jabr Wa'l muqabalah*, de onde origina a palavra álgebra. Neste livro *Al-Khwarizmi* classifica as equações em seis tipos básicos e aponta métodos algébricos e geométricos para a resolução.

- O capítulo I aborda o caso de quadrados igual a raízes, ou na linguagem utilizada hoje, $ax^2 = bx$, a e b números reais (não se conhecia a raiz $x=0$);
- O capítulo II trata-se do caso de quadrados iguais a números, ou seja, quando $ax^2 = c$, a e c números reais;
- O capítulo III abrange o caso de raízes iguais a números, ou seja, quando $bx = c$, b e c números reais;
- No capítulo IV, é analisado o caso de quadrados e raízes iguais a números, ou seja, $ax^2 + bx = c$, a, b e c números reais;
- No capítulo V, o caso de quadrados e números iguais a raízes, ou seja, $ax^2 + c = bx$, a, b e c números reais;
- E por fim, no capítulo VI, o caso de raízes e números iguais a quadrados, ou seja, $bx + c = ax^2$, a, b e c números reais.

Cabe ressaltar que apenas as raízes positivas eram consideradas, uma vez que os números negativos ainda não eram conhecidos nesta época. Assim, as equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ e $bx + c = 0$ não aparecem nessa classificação, pois não possuem soluções positivas se todos os coeficientes forem positivos.

Para a equação $x^2 + 10x = 39$ Al-Khwarizmi traça um quadrado ab para representar x^2 , e sobre os quatro lados desse quadrado coloca retângulos c, d, e e f, cada um com largura $2\frac{1}{2}$. Para completar o quadrado maior é preciso acrescentar os quatro pequenos quadrados nos cantos cada um dos quais tem uma área de $6\frac{1}{4}$ unidades. Portanto para “completar o quadrado” somamos 4 vezes $6\frac{1}{4}$ unidades ou 25 unidades, obtendo, pois, um quadrado de área total $39 + 25 = 64$ unidades (como fica claro no segundo membro da equação). O lado do quadrado grande deve, pois, ser de 8 unidades, de que subtraímos 2 vezes $2\frac{1}{2}$ ou 5 unidades, achando $x=3$, e provando assim que a resposta encontrada no Cap. IV está correta (BOYER, 1974, p. 158).

O método geométrico utilizado por *Al-Khwarizmi* (conhecido atualmente como método de completar quadrados) na resolução de equações do segundo grau, se utilizado em sala de aula, oportuniza uma aprendizagem mais significativa do conteúdo, pois exige que o aluno transite entre as representações algébricas e geométricas ao resolver a equação do segundo grau. Nesse contexto Duval afirma que: “A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação” (DUVAL, 2003, p.14).

Uma Abordagem Histórica da Equação do Segundo Grau

Mesopotâmia

O primeiro registro conhecido da resolução de problemas envolvendo o que hoje chamamos de equação do segundo grau data de 1700 a.C. aproximadamente, feito numa tábua de argila através de palavras. A solução era apresentada como uma “receita matemática” e fornecia somente uma raiz positiva. Os mesopotâmicos enunciavam a equação e sua resolução em palavras, mais ou menos do seguinte modo:

Qual é o lado de um quadrado em que a área menos o lado dá 870? (o que hoje se escreve: $x^2 - x = 870$). E a “receita” era:

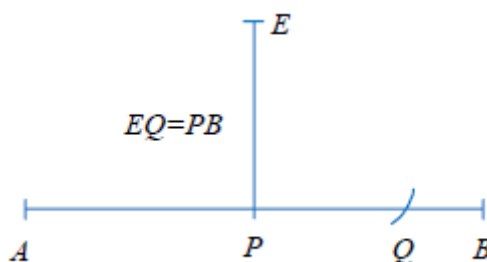
Tome a metade de 1 (coeficiente de x) e multiplique por ela mesma, ($0,5 \cdot 0,5 = 0,25$). Some o resultado a 870 (termo independente). Obtém-se um quadrado ($870,25 = 29,5^2$) cujo lado somado à metade de 1 vai dar (30) o lado do quadrado procurado.

Grécia

Acredita-se que a dificuldade com o tratamento dos números racionais e irracionais, com a falta de praticidade do sistema de numeração grego, que era literal,

além do gosto natural pela geometria, levou essa civilização (500 a 200 a.C.) a desenvolver um tratamento geométrico de muitos problemas matemáticos, dentre os quais a solução de equações do 2º grau. Um dos processos de que se tem notícia, usado, por exemplo, na equação que hoje se escreve como $x^2 - 10x + 9 = 0$ era o seguinte:

Trace o segmento $AB = 10$. Por P , ponto médio de AB , levante o segmento perpendicular $PE = 3$ (igual à raiz quadrada de 9) e, com centro em E e raio PB , trace um arco de circunferência que corta AB no ponto Q . A raiz desejada será dada pelo comprimento AQ .



Como efeito, por construção, a medida do segmento AQ será

$$\frac{10}{2} + \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - (\sqrt{9})^2} \text{ e corresponde à raiz 9 da equação.}$$

Para realização dessa atividade utilizaremos o software GeoGebra disponível para celular, em virtude da importância de se utilizar as Tecnologias da Comunicação e Informação (TIC) em sala de aula, pois, conforme menciona Ponte (2001), os instrumentos provenientes das TIC oportunizam um tratamento contemporâneo, reafirmando o papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, tornando relativo a relevância do cálculo e da manipulação simbólica.

Atividade 1) Resolva, utilizando o método geométrico visto e o software GeoGebra, a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Europa Ocidental

Embora ainda não se usasse o formalismo atual, o processo para resolver problemas envolvendo as atuais equações do 2º grau resumia-se na receita usada por Bhaskara. Do século XV ao XVII, muitos foram os matemáticos que desenvolveram formas distintas de representar a resolução da equação do 2º grau.

Para resolver a equação $x^2 + 2ax = b$, François Viète (1540-1603) propôs uma mudança de variáveis, que transformava a equação inicial em uma equação incompleta. Os passos por ele utilizados, na notação atual, são:

- 1) Seja $x + a = u$
- 2) Então $u^2 = x^2 + 2ax + a^2$
- 3) Pela equação dada $x^2 + 2ax = b$, ou seja, $u^2 = b + a^2$
- 4) Logo $(x + a)^2 = u^2 = b + a^2$ e $x = \pm\sqrt{b + a^2} - a$

Para uma equação geral da forma $ax^2 + bx + c = 0$, o método de Viète seria:

- 1) Seja $x = u + z$
- 2) Então substituindo em $ax^2 + bx + c = 0$, tem-se $a(u + z)^2 + b(u + z) + c = 0$, ou seja, $au^2 + (2az + b)u + (az^2 + bz + c) = 0$
- 3) Se $2az + b = 0$, tem-se $z = -\frac{b}{2a}$
- 4) Substituindo $z = -\frac{b}{2a}$ em $au^2 + (2az + b)u + (az^2 + bz + c) = 0$, tem-se $au^2 + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right) = 0$, ou seja, $au^2 = \frac{b^2}{2a} - \frac{b^2}{4a} - c = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$, ou ainda, $u = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$
- 5) Finalmente substituindo os valores $z = -\frac{b}{2a}$ e $u = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ em $x = u + z$, tem-se $x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$, ou seja, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Atividade 2) Resolva a equação $3x^2 - 7x + 4 = 0$ utilizando o método de François Viète.

Arábia

Se, por um lado, como diz a tradição, os árabes foram responsáveis pelo desaparecimento do saber ocidental, por outro contribuíram para sua preservação. Segundo consta, o extermínio se deu quando, em 641 d.C., o califa Omar mandou que fosse destruída a Biblioteca de Alexandria. E a preservação foi obra de três califas, considerados os grandes patronos da cultura abássida: *al-Mansur*, *Harum al-Rachid* e *al-Mamum*, que durante seus reinados foram responsáveis pela tradução, do grego para o árabe, dos mais importantes escritos científicos conhecidos, entre eles, O Almagesto de Ptolomeu e Os Elementos de Euclides.

Al-Mamum fundou em Bagdá, no século IX, um centro científicos similar à Biblioteca de Alexandria, denominado Casa da sabedoria (*Bait al-hikma*), para onde convergiram muitos matemáticos, dentre os quais *Mohamed ibn-Musa Al-Khowarizmi*, que, além de outras obras, escreveu, em 825, *Hisab al-jabr wa'lmuqabalah* (ciência da restauração e da redução ou ciência das equações), obra de grande potencial didático.

$$b) x^2 - 8x + 16 = 0$$

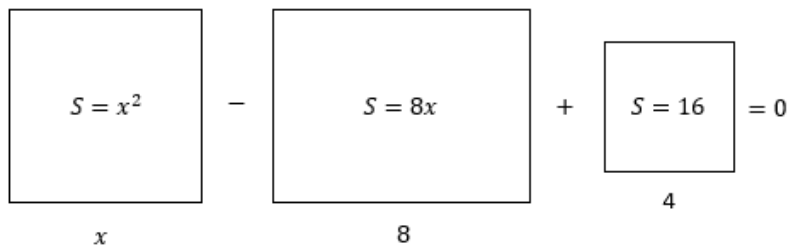
$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$(x - 4)^2 = 0$$

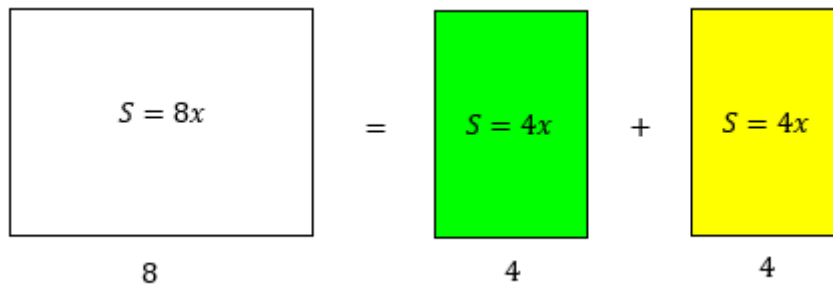
$$x - 4 = \pm\sqrt{0}$$

$$x - 4 = 0, \text{ logo } x = 4$$

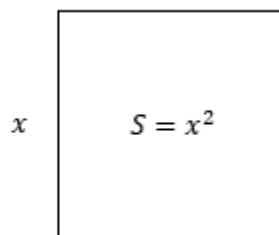
Geometricamente temos a seguinte situação:



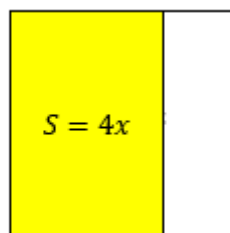
Dividindo o retângulo em duas partes iguais, temos:



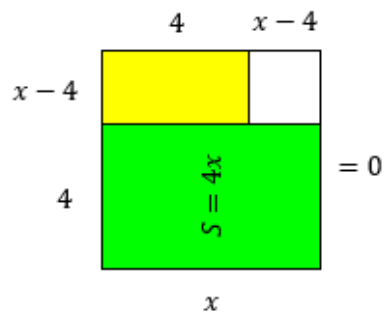
Assim, temos um quadrado de lado x :



Subtraindo a área $S = 4x$ de um dos retângulos, temos:



Em seguida, subtraindo a área $S = 4x$ do segundo retângulo, temos:



Assim, podemos observar que a área restante é a do quadrado de cor branca, cujo lado é $l = x - 4$, e, conseqüentemente, sua área é $S = (x - 4)^2$. Portanto, a equação $x^2 - 8x + 16 = 0$ pode ser reescrita como $(x - 4)^2 = 0$, logo a raiz procurada é $x = 4$.

2) Equações onde se acrescenta número

a) $x^2 + 12x = 64$

$$x^2 + 12x = 64$$

$$x^2 + 12x + 36 = 64 + 36$$

$$(x + 6)^2 = 100$$

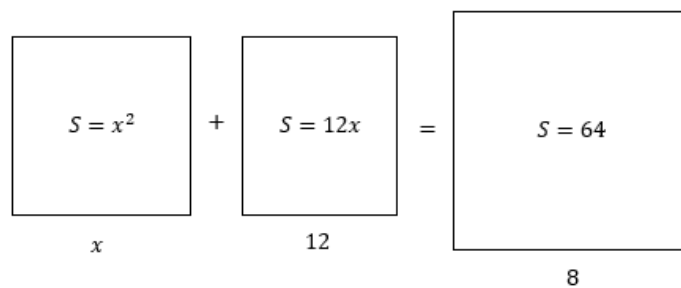
$$x + 6 = \pm\sqrt{100}$$

$$x + 6 = \pm 10$$

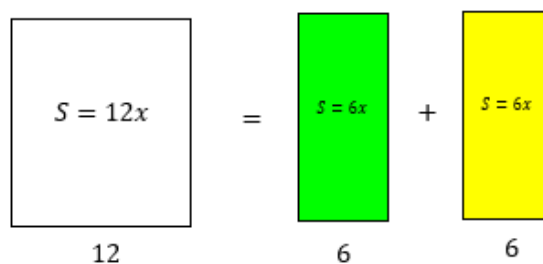
$$x = -6 \pm 10$$

$$x = -16 \text{ ou } x = 4$$

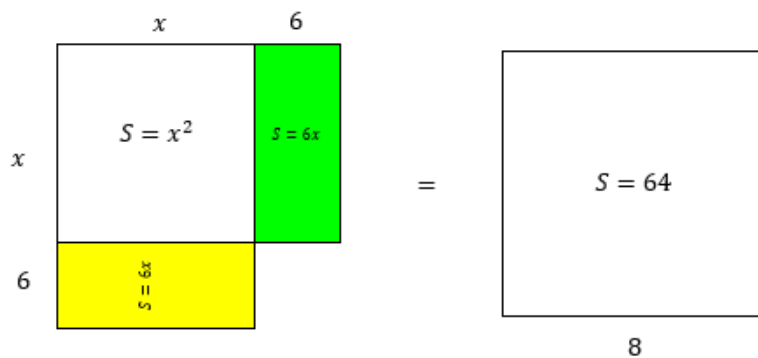
Geometricamente temos a seguinte situação:



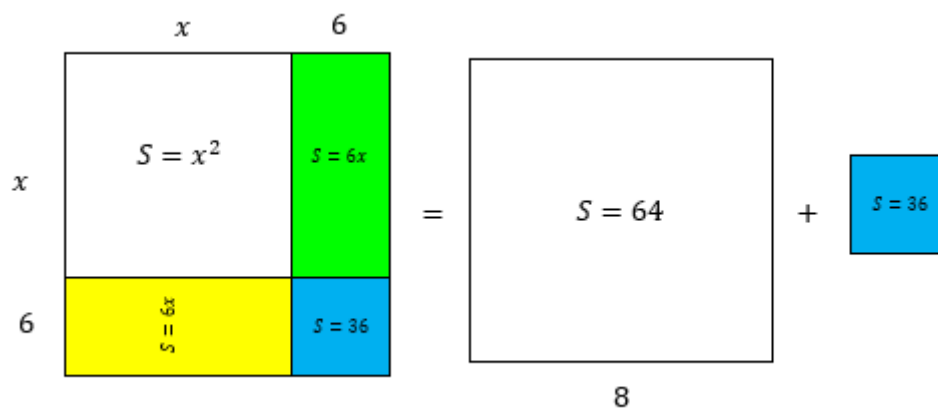
Dividindo o retângulo em duas partes iguais, temos:



Agora, agrupando as figuras com o intuito de completar um quadrado, temos:



Adicionando um quadrado de lado 6 em ambos os lados da igualdade temos que:



Assim, o lado do quadrado é $l = x + 6$, e, portanto, sua área é $S = (x + 6)^2$.

Logo, temos que:

$$x^2 + 12x = 64$$

$$(x + 6)^2 = 64 + 36$$

$$(x + 6)^2 = 100$$

$$x + 6 = \pm\sqrt{100}$$

$$x + 6 = \pm 10$$

$$x = -6 \pm 10$$

$$x = -16 \text{ ou } x = 4$$

Assim, o lado do quadrado é $l = x + 1$. Sabendo que a área do quadrado é $S = l^2$, temos que $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 = 0$, e, portanto, $x = -1$.

Com os exemplos vistos, podemos apresentar uma resolução genérica para a equação do segundo grau. Seja uma equação do segundo grau, da forma da forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde a , b , e c são números reais, com a diferente de zero. Para a utilização do método, é preciso seguir os seguintes passos:

1) Dividir a equação pelo valor de a

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

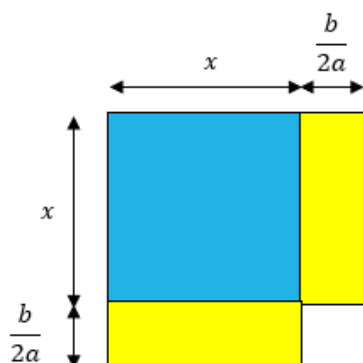
2) Isolar o termo independente, ou seja, subtrair dos dois lados da igualdade o valor de $\frac{c}{a}$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

3) Montar a seguinte representação geométrica para a equação:

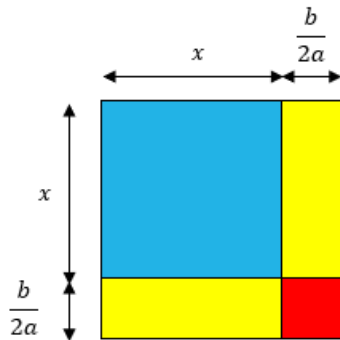
a) Construir um quadrado de lado x , ou seja, de área x^2 ;

b) Adicionar dois retângulos de lados x e $\frac{b}{2a}$, ou seja, dois retângulos de área $\frac{b}{2a}x$, totalizando uma área de $\frac{b}{a}x$, a dois lados adjacentes do quadrado, como na figura abaixo:



Temos então que a área da figura construída é exatamente $x^2 + \frac{b}{a}x$, que pelo item 2, tem o valor de $-\frac{c}{a}$.

4) Completar, geometricamente, a figura construída no item 3 para que se torne um quadrado.



Temos então que foi adicionado um quadrado de lado $\frac{b}{2a}$, como indica a figura anterior. Logo, se antes a área da figura era de $-\frac{c}{a}$, agora temos que a área total da figura tem o valor de $-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$.

Observando o quadrado completado, percebemos que ele possui lado igual a $x + \frac{b}{2a}$, portanto, possui área igual a $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.

Igualando os valores da área do quadrado completado, temos que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. Logo $x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Cabe ressaltar que utilizando o método de completar quadrados para encontrar as raízes de uma equação do segundo grau é possível identificar o x e o y do vértice da função de segundo grau associada.

Observe nos exemplos:

$$a) x^2 + 12x = 64$$

$$x^2 + 12x = 64$$

$$x^2 + 12x + 36 = 64 + 36$$

$$(x + 6)^2 = 100$$

Aqui podemos identificar que o x do vértice é -6 e o y do vértice é -100 .

$$b) x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$(x + 3)^2 = 0$$

Aqui podemos identificar que o x do vértice é -3 e o y do vértice é 0 .

$$c) x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

$$(x - 4)^2 = 0$$

Aqui podemos identificar que o x do vértice é 4 e o y do vértice é 0.

De forma genérica, quando utilizamos o método de completar quadrados chegamos numa expressão do tipo: $(x - x_v)^2 = -y_v$, onde, x_v e y_v são, respectivamente, o x e o y do vértice da função associada. Isso decorre da equação reduzida da parábola.

Considerações Finais

A oficina atendeu alunos da Educação Básica e do Ensino Superior apresentando a eles outras ferramentas para resolução de equações de segundo grau, possibilitando refletirem sobre os processos de resoluções, aplicabilidade e viabilidade desses métodos como alternativas para as fórmulas.

A história da matemática foi utilizada no intuito de auxiliar na contextualização histórica das diversas maneiras que encontradas por diferentes culturas para solucionar as situações que envolviam equações de segundo grau.

É de extrema importância para o ensino-aprendizagem de qualquer conteúdo matemático é interligar com outras áreas de dentro da matemática, ao apresentarmos o método de completar quadrados fica visível a forte ligação com geometria, para mostrar para os alunos o processo realizado ao resolvermos essas equações.

Podemos salientar que ensino de outros métodos de resolução de equações de segundo grau, que não sejam através de fórmulas pode enriquecer as aulas, bem como ajudar a desenvolver raciocínio lógicos dos alunos e sair das aulas ditas tradicionais.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação (MEC). Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Disponível em:

<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 18 de maio de 2019.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**, 1974.

CHAQUIAM, Miguel. **Ensaio temáticos**: história e matemática em sala de aula.

Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/historia_matematica.pdf>. Acesso em: 01 jun. 2019.

DOMINGUES, H. H., Síntese da História das Equações Algébricas, In. Caderno: **Ensino Aprendizagem de Matemática**, Publicações da SBEM-SP, nº2, 2000.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D.A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papyrus, 2003, p. 11-33.

PONTE, J.P. **Tecnologias de informação e comunicação na educação e na formação de professores: Que desafios para a comunidade educativa? Tecnologias em educação: Estudos e investigações** (Actas do X Colóquio da AFIRSE, pp. 89-108). Lisboa: Universidade de Lisboa, Faculdade de Psicologia e de Ciências da Educação. 2001