Comparação computacional da série de Maclaurin e série de Fourier

Jonathan R. da Costa[1]
Universidade Federal de Pelotas
costajonathan.r@gmail.com

Leslie D. Pérez Fernández[2]
Universidade Federal de Pelotas
leslie.fernandez@ufpel.edu.br

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre séries de Taylor e Fourier, em que, respectivamente, a série de Taylor é formada por funções polinomiais e a série de Fourier é formada por funções trigonométricas. Sendo criada por Brook Taylor (1685 - 1731), a série de Taylor é usada em diversas vezes no cálculo numérico e para solucionar equações diferenciais. Já série de Fourier foi criada por Jean B. Joseph Fourier (1768 - 1830), sendo usada para representar funções complexas que representam processos físicos como, por exemplo, a condução de calor em uma barra de ferro. Ambas as séries são usadas para uma melhor aproximação de funções mais complexas, onde cada uma terá o seu diferencial quando for desenvolvida. Foram expandidas as funções $y = e^x$ e $y = \ln(x+1)$ em ambas as séries, e posteriormente programamos no scilab para podermos fazer comparações a respeito da qualidade da aproximação feita pelo truncamento de cada série com diferentes quantidades de termos em relação a função dada e, também, comparar para a mesma quantidade de termos a série de Taylor com a série de Fourier. Conclui-se que a série Taylor se torna mais efetiva quando abordamos funções que não são periódicas na reta, enquanto Fourier é uma melhor escolha para representarmos funções periódicas.

Palavras-chave: Série**,** Maclaurin, Fourier, Comparação

Introdução

Quando falamos sobre funções, vemos mais comumente destes tipos, $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$,... , as chamadas funções polinomiais. Agora, quando se trata de funções não polinomiais, como as que vemos em calculadoras, $y = e^x$, $y = \log(x)$, $y = \sin(x)$,... , não existe uma representação exata para as mesmas. Para representa-las fazemos o uso de aproximações por séries numéricas, mais precisamente por séries de potências (PINEDO, 2017). Existem diversos tipos de séries de funções para representarmos funções não polinomiais, neste trabalho trabalharemos com dois tipos, Série de Maclaurin, que é um caso particular da série de Taylor, em que a mesma é uma série de potências centrada em zero, e a Série de Fourier, uma série gerada por soma de funções trigonométricas, que convergem num certo intervalo da reta (PUPIN, 2011).

As duas séries são eficientes para representarmos funções, a fim de saber qual série tem melhor eficácia, o artigo traz comparações em relação a cada série em relação ao número de termos do seu truncamento para com a função desejada. Também é realizado a comparação das duas séries, Taylor e Fourier, com relação ao mesmo número de termos no truncamento da série para ver qual série tem o menor custo computacional com o resultado mais preciso.

Para termos uma melhor visão tanto gráfica quanto algébrica, os testes foram feitos no papel e posteriormente no software Scilab, fazendo as comparações citadas acima. Para isso, trazemos exemplos de funções como $y = e^x$ e $y = \ln(x+1)$, onde analisamos as aproximações com relação a função com o menor número de termos de iteração e com quantos termos cada série converge, também é comparado os erros relativos, graficamente, da aproximação com a função original.

Generalidades

Definição: Dada a sequência de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, uma expressão da forma $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ é uma série infinita. A sequência definida por

$$\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}, S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

é a sequência das somas parciais da série. Se a sequência de somas parciais convergirem para um limite L, dizemos que a série converge e que a soma é L. Denotando por,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = L.$$

Se a sequência de somas parciais não converge, então dizemos que a série diverge (THOMAS, 2012).

Séries de potências

Uma série infinita no seguinte formato,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots$$

é dita série de potência, em que $a_k, k \in \mathbb{N}$ são os coeficientes da série, $(x - x_0)^k$ é uma função polinomial de grau k que varia em torno do chamado centro x_0. Esse tipo de série nem sempre converge para todo $x \in \mathbb{R}$ e, para isso, analisamos o raio de convergência $R > 0$, tal que a série converge absolutamente quando $|x - x_0| < R$ e diverge para $|x - x_0| > R$. Em casos particulares quando $R \to \infty$ a série converge para toda a reta e quando $R = 0$ a série converge para x_0. Para analisarmos o raio de convergência das séries podemos fazer o uso de dois testes da razão e da raiz n-ésima (DEMIDOVICH, 1976), onde os mesmos convergem absolutamente quando, respectivamente:

$$|x - x_0| < \frac{1}{\lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}|} = R$$

$$|x - x_0| < \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = R$$

Série de Taylor e Maclaurin

Um caso particular das séries de potências é quando uma função dada está associada a uma expansão da seguinte forma. Tome, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$, com um raio de convergência absoluta, derivando termo a termo, os termos do somatório, teremos a n-ésima derivada, da seguinte forma (THOMAS, 2012):

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots + a_k(x - x_0)^{k-1} + \cdots$$

$$f''(x) = 1.2a_2 + 2.3a_3(x - x_0) + 3.4a_4(x - x_0)^2 + \cdots$$

$$f'''(x) = 1.2.3a_3 + 2.3.4a_4(x - x_0) + 3.4.5a_5(x - x_0)^2 + \cdots$$

Até chegarmos em $f^{(k)}(x_0) = k!\, a_k$, para $x = x_0$, de onde os coeficientes são $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Com essas considerações a série de Taylor, centrada em x_0 é descrita da seguinte forma:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

A série de Maclaurin é um caso particular da série de Taylor, onde $x_0 = 0$, trabalharemos com ela neste artigo.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Quando queremos o valor numérico de uma função em um ponto, fazemos aproximações por essas séries, o valor exato da função é obtido quando somamos infinitamente os termos da série, porém, isto não é possível, para isso os somatórios são truncados em certo k, ocorrendo naturalmente, um erro que chamamos de erro de truncamento, podemos calcular os erros dessas séries da seguinte forma, considerando que exista uma constante $M > 0$ tal que $|f^{k+1}(t)| \leq M$ para todo $x \leq t \leq x_0$, então o termo proporcional a próxima derivada de $f(x)$ é $R_k(x)$, onde o mesmo é o complemento da série truncada para obter o valor absoluto da função (THOMAS, 2012).

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$$

Onde,

$$R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(t)}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}$$

Com $x \leq t \leq x_0$. Então o erro da série fica estimado da seguinte forma

$$|R_k(x)| \leq M \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}$$

Série de Fourier

Para falar desta série em especial, é preciso ter noção de funções ortogonais, isto é, funções que em um intervalo $[a, b]$ quando feito a integral destas neste intervalo, o resultado é zero. Em outras palavras pode-se ter a mesma ideia de vetores, cujo quando dois vetores são ortogonais o seu produto é zero.

Este tipo de série em particular é uma composição de somas funções de trigonométricas, para representar uma função definida em um intervalo $(-p, p)$.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right)$$

Para achar seus coeficientes a_0, a_n e b_n, usamos a ideia de funções ortogonais, ainda mais que isso, fazemos uso análogo de produto interno para vetores. Então para descobrir os coeficientes temos:

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{p}^{p} f(x) \cos \left(\frac{n.\pi.x}{p} \right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \sin \left(\frac{n.\pi.x}{p} \right) dx$$

O teorema a seguir nos dá as condições de convergência de uma série de Fourier em um ponto (ZILL, 2001).

Teorema de Drichlet: Sejam f e f' parcialmente contínuas no intervalo $(-p, p)$, ou seja, há descontinuidades finitas nos pontos do intervalo. Então, a série de Fourier no intervalo irá convergir para $f(x)$em um ponto de continuidade. Nos pontos de descontinuidade a série irá convergir para a média $\frac{f(x+)+f(-x)}{2}$ onde $f(x) = \lim_{h \to 0} f(x + h)$ e $f(-x) = \lim_{h \to 0} f(x - h)$ para $h > 0$.

Exemplos

No exemplo a seguir trabalharemos com a função $y = e^x$, seu termo geral na série de Maclaurin é descrito da seguinte forma:

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Seu termo geral na série de Fourier:

$$e^x = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{n^2+1}\right)\frac{sinh(\pi)cos(n\pi) + \ ncosh(\pi)sin(n.\pi)}{\pi}\cos(nx) + \left(\frac{2}{n^2+1}\right)\frac{cosh(\pi)sin(n\pi) - \ nsinh(\pi)cos(n\pi)}{\pi}\sin(nx)\right)$$

Após realizados os testes de convergência, constatou-se que função tem convergência absoluta para toda a reta, por esse motivo, o tamanho do intervalo escolhido é $(-\pi, \pi)$, as séries foram implementadas no software Scilab, para uma melhor comparação no número de termos e do gráfico. Na primeira imagem (Figura 1), mostra as duas séries representando a função, vermelho por Fourier, azul por Maclaurin e em preto a própria $y = e^x$, são divididas em seis janelas, pois cada uma mostra as séries expandidas em respectivamente, de 1 a 6 termos no seus somatórios. Notoriamente, a série de polinomiais se aproxima mais rapidamente para o resultado função.

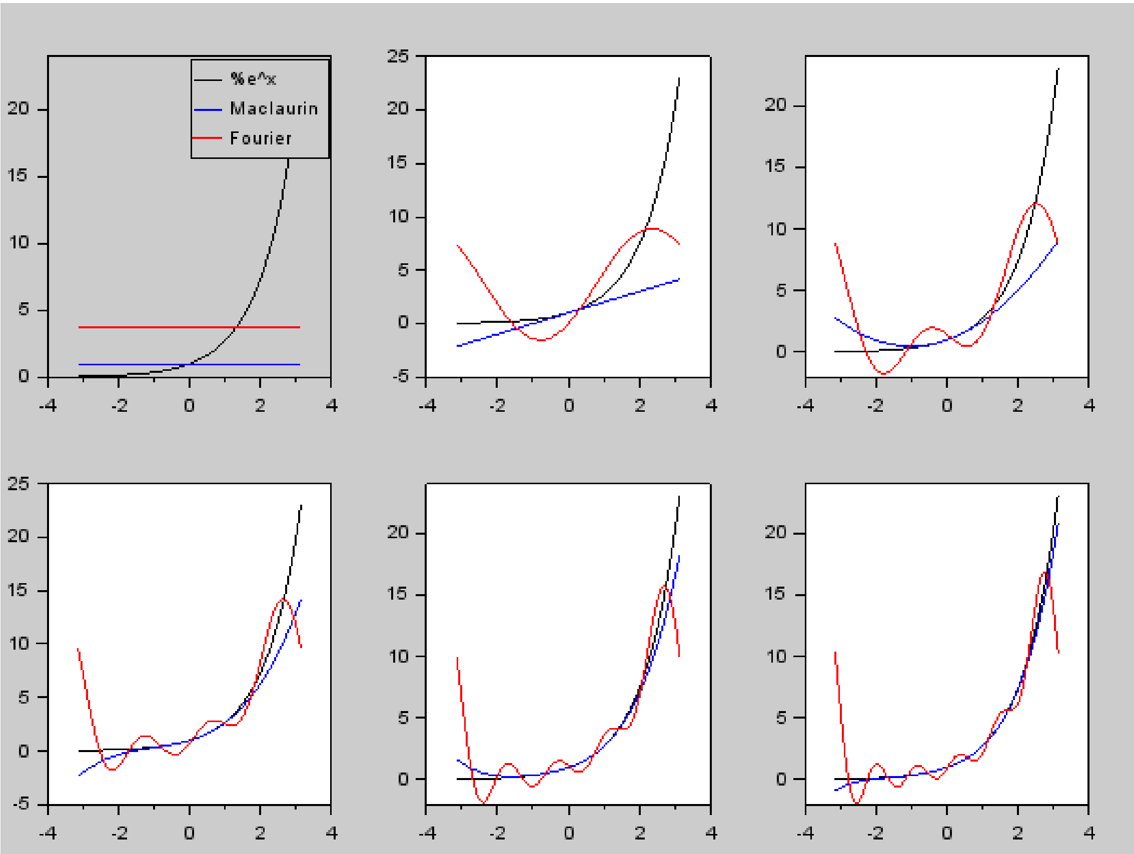

Figura 1. A curva em preto representa a função $y = e^x$, enquanto a curva vermelha a expansão em série de Fourier e a azul expansão em série de Maclaurin, cada janela gráfica representa as expansões com diferentes números no truncamento da série, respectivamente, 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6 termos.

Comparando o erro dos somatórios com a função almejada, vemos também que Maclaurin apresenta um menor erro em relação a Fourier, conforme o número de termos do somatório aumenta, a série de polinômios tende seu gráfico para zero, como nos é mostrado graficamente. (Figura 2).

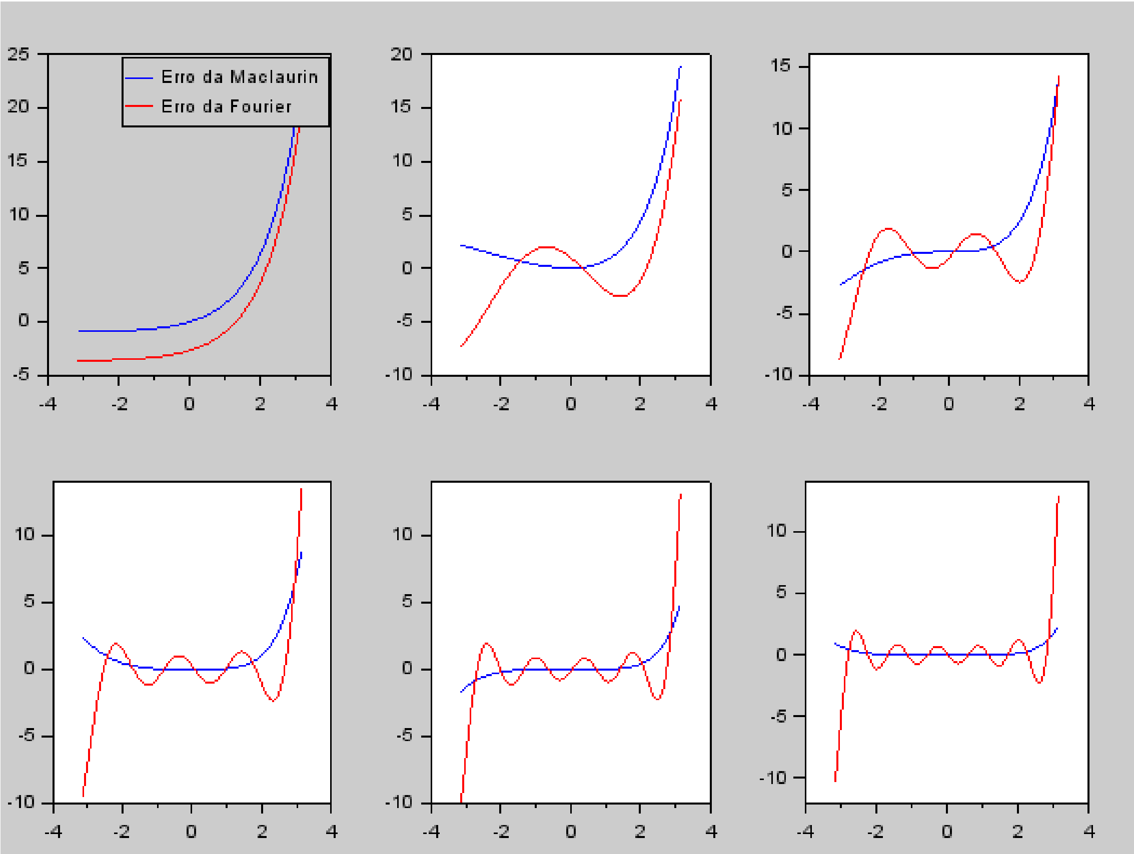

Figura 2. Os gráficos apresentam a diferença entre a função $y = e^x$ com as expansões em séries da função, a curva azul representa o erro relativo da série de Maclaurin em diferentes termos no truncamento da série e a curva vermelha representa o erro relativo da série de Fourier em diferentes termos no truncamento da série. Ambos truncamentos são em respectivamente, 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6 termos no truncamento das séries.

Tomando a série de Fourier aplicada a diferentes números de iterações na sua soma, sendo eles, 0, 5 10, 15, 20, 25 em cada janela gráfica (Figura 3). Vê-se que quanto mais termos na soma da série, mais próxima ela fica da função desejada.

Vale ressaltar, que quando a série de Fourier apresenta esses saltos nos extremos é chamado de fenômeno de Gibbs, isso ocorre pelo fato da descontinuidade da série, neste caso gerada propositalmente pelo intervalo tomado.

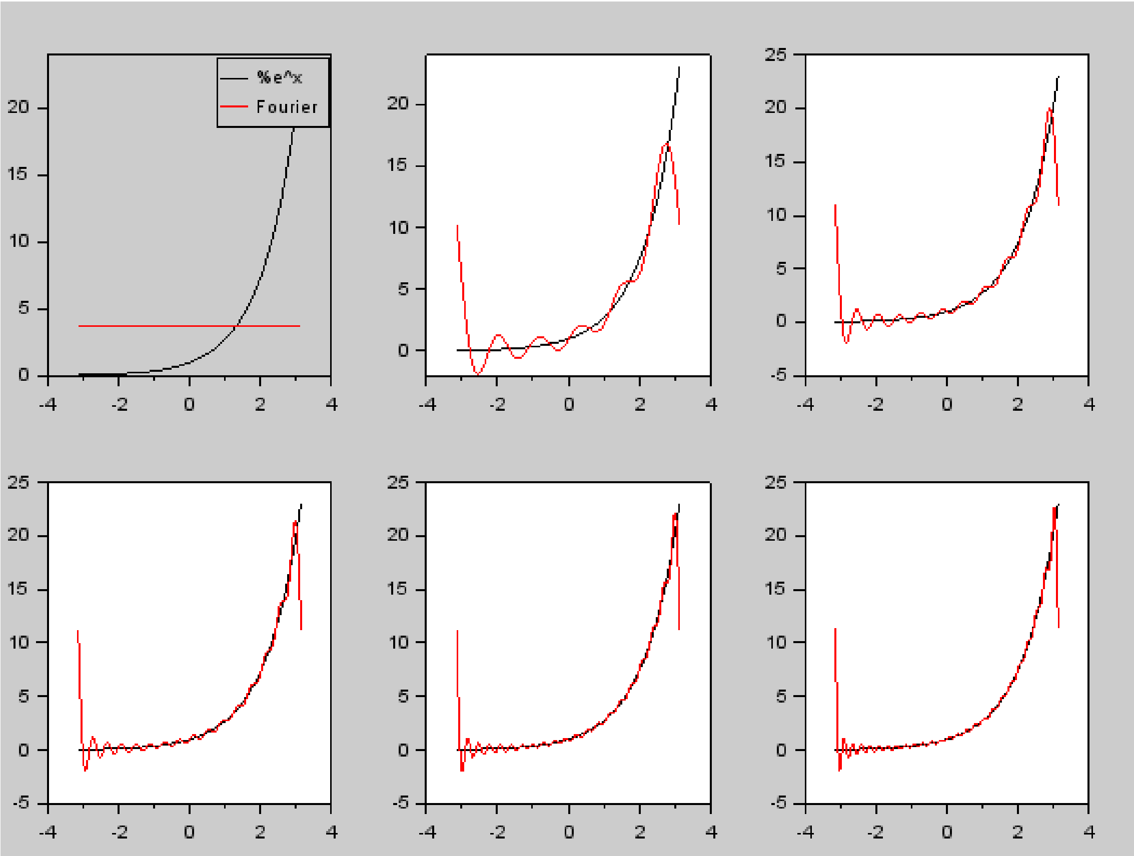

Figura 3. A curva preta representa a função $y = e^x$, enquanto a vermelha, a expansão em série de Fourier da mesma função para diferentes termos no truncamento da série, respectivamente, 0, 5, 10, 15, 20 e 25 termos.

No próximo exemplo é feito aproximação por série de Maclaurin e série de Fourier, da função $y = \ln(x+1)$. Onde respectivamente os termos gerais de cada série são:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n!}$$

Para Fourier não se consegue uma representação na forma de série pelo fato do domínio da função, ter restrições. Por esse motivo, vamos expressa-la da seguinte forma:

$$\ln(x+1) = \frac{\log(2)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x)$$

Onde,

$$a_n = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{-1+\varepsilon}^{1} \ln(x+1) \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx \right)$$

$$b_n = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{-1+\varepsilon}^{1} \ln(x+1) \sin\left(\frac{n.\pi.x}{p}\right) dx \right)$$

As duas séries serão desenvolvidas em Scilab, no intervalo de convergência verificado pelos testes de convergência, onde a função abordada, $y = \ln(x+1)$, converge absolutamente entre $(-1,1)$, o número de termos para ambas as séries foi o mesmo, tendo como variação do termo da série, seis passos. Nota-se que a série de potências converge mais rapidamente para a função em questão (Figura 4).

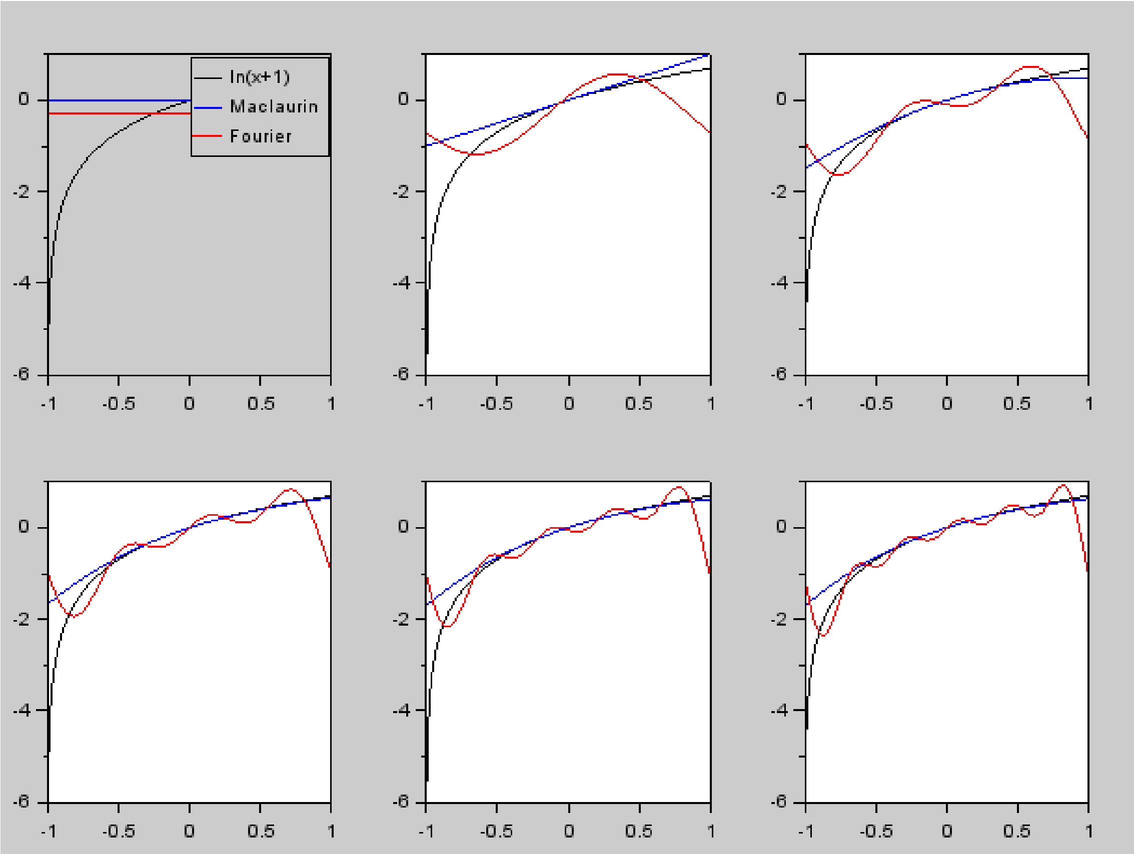

Figura 4. A curva em preto representa a função $\boldsymbol{y = \ln(x+1)}$, enquanto a curva vermelha a expansão em série de Fourier e a azul expansão em série de Maclaurin, cada janela gráfica representa as expansões com diferentes números no truncamento da série, respectivamente, 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6 termos.

Analisando o erro das duas séries, o gráfico a seguir (Figura 5), mostra as diferenças entre a função e as aproximações, respectivas. Nota-se que o erro da série de Maclaurin é visivelmente menor comparado com a outra série.

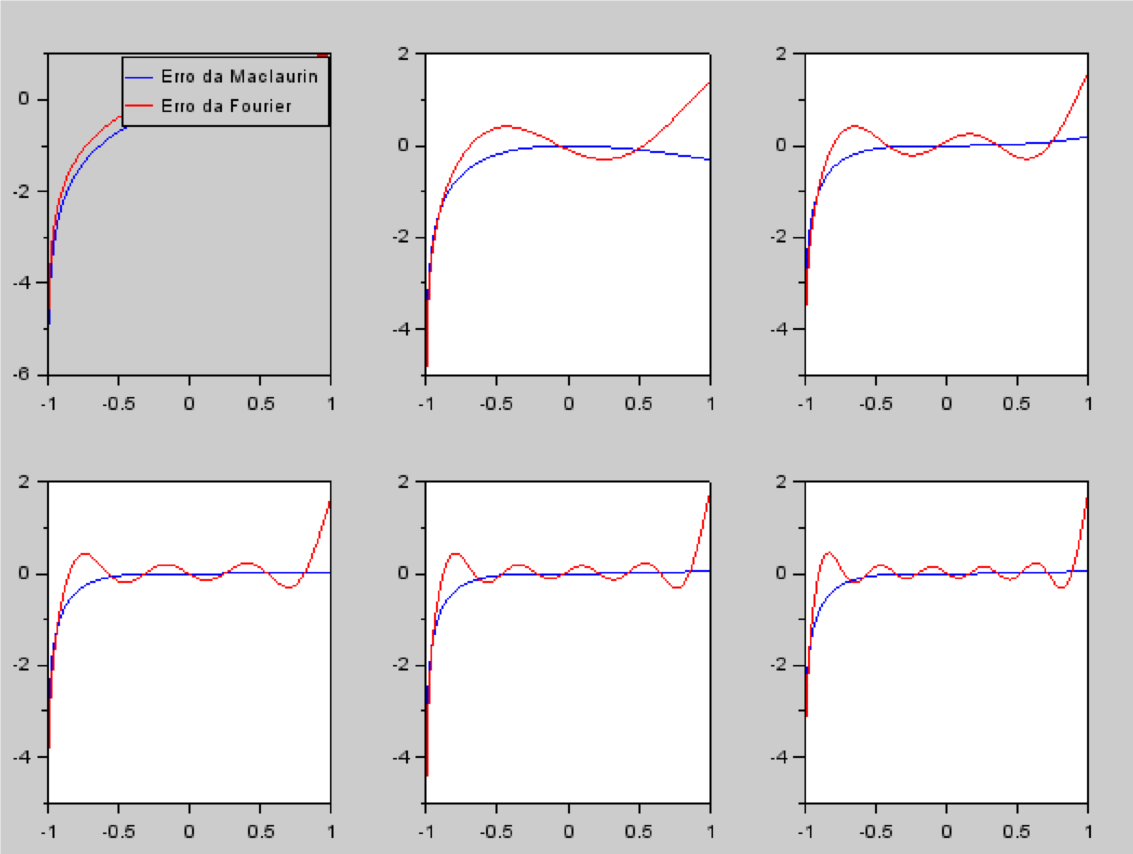

Figura 5. Os gráficos apresentam a diferença entre a função $y = \ln(x+1)$ com as expansões em séries da função, a curva azul representa o erro relativo da série de Maclaurin em diferentes termos no truncamento da série e a curva vermelha representa o erro relativo da série de Fourier em diferentes termos no truncamento da série. Ambos truncamentos são em respectivamente, 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6 termos no truncamento das séries.

A próxima figura (Figura 6) mostra a série de Fourier aplicada a diferentes números de iterações na soma da série, sendo eles, 0, 5, 10, 15, 20, 25. Vê-se que quanto mais termos na soma da série, mais próxima à mesma fica da função desejada.

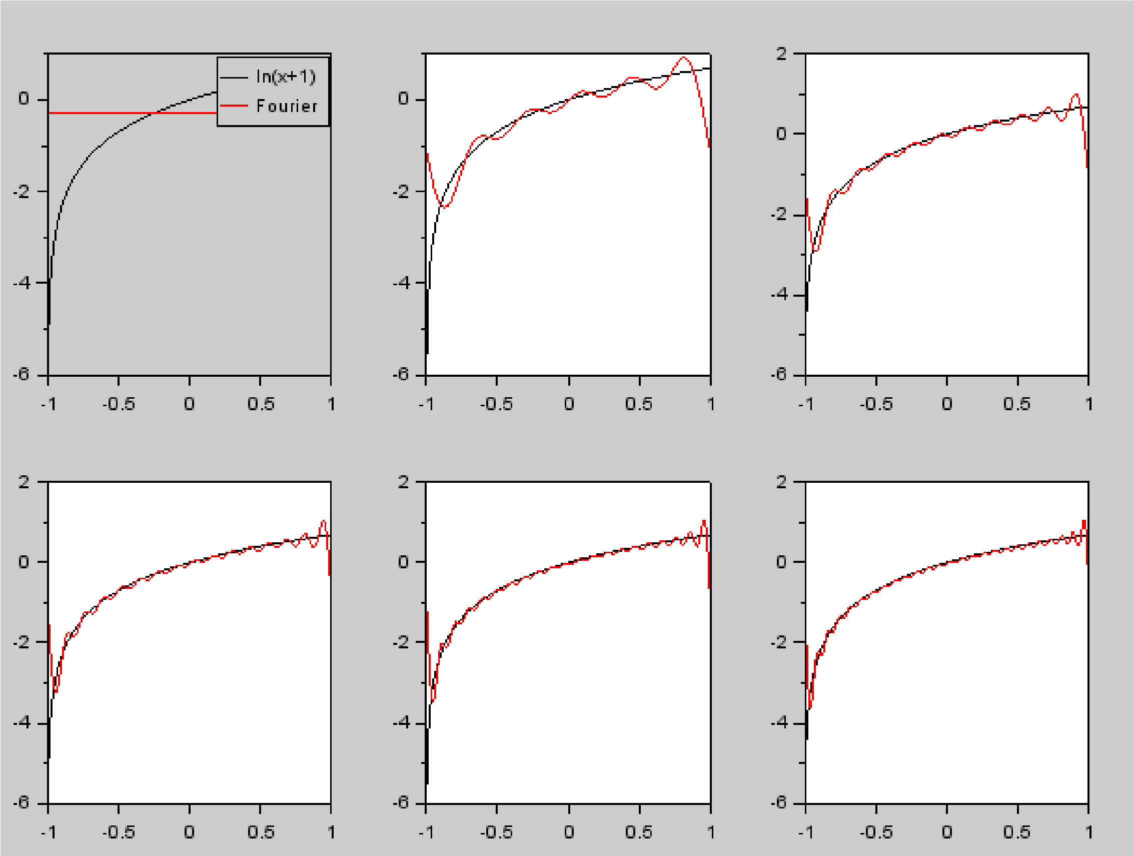

Figura 6. A curva preta representa a função $y = \ln(x+1)$, enquanto a vermelha, a expansão em série de Fourier da mesma função para diferentes termos no truncamento da série, respectivamente, 0, 5, 10, 15, 20 e 25 termos.

Conclusão

Como visto, o intuito do trabalho era concluir com bases nos exemplos, qual série tem o menor custo computacional com maior precisão de aproximação da função. Foi notória a diferença de velocidade com que Maclaurin convergia primeiro que Fourier, tendo assim um melhor custo computacional com maior exatidão. Vale ressaltar que, embora Fourier não sendo tão eficiente nos exemplos trazidos para o trabalho, pelo fato de serem funções não periódicas, ainda assim, esta série traz vantagens como, por exemplo, na representação de funções periódicas, onde essas convergem para certo intervalo, ainda a série de Fourier nos permite expandi-las periodicamente para todo o domínio.

Referências

DEMIDOVICH, Boris P. *5 problemas de analises matemática.* Tradução: Emiliano Aparicio Bernardo. Madrid: Paraninfo, 1976.

PINEDO, C. J. Q. *Séries e Equações Diferenciais.* 1. ed. Palmas: EDUFT, 2017.

PUPIN, Josiana Rovatti. *Introdução às Séries e Transformadas de Fourier e Aplicações no Processamento de Sinais e Imagens.* Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal de São Carlos Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia Departamento de Matemática, São Carlos, 2011.

THOMAS, George B. *Cálculo,* Volume 2. Tradução: Carlos Scalici;. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

ZILL, Dennis G., CULLEN, Michael R. *Equações Diferenciais.* Tradução: Alfredo Alves de Faria. São Paulo: Makron Books, 2001.