A arte matemática nas obras de Escher: explorando conceitos da geometria

Edwarda Schunemann[1]

Caroline dos Santos[2]

Isabel Koltermann Battisti[3]

Resumo

A presente escrita tem por objetivo contribuir na organização do ensino de conceitos da geometria plana, de forma especial aos relacionados a formas e propriedades e transformações no plano. Apresenta o minicurso *A arte matemática nas obras de Escher,* o qual considera conceitos geométricos e discute o estabelecimento de processos de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos considerando aspectos das obras de Escher relacionados à pavimentação e isometrias. A atividade terá interação da Matemática com a Arte, abordando e introduzindo uma das técnicas utilizada pelo famoso artista Maurits Cornelis Escher em suas obras de ladrilhamento e propondo a cada um dos alunos o desafio de criarem uma obra única utilizando a referida técnica. O minicurso foi elaborado com base na resolução de problemas abordada por Polya (1995), se estrutura em momentos, quais sejam: contextualização de pavimentações, proposição do primeiro problema, discussões e analises do primeiro problema, proposição do segundo problema, contextualização das isometrias e proposição do desafio de produção da obra de arte. Possibilita aos participantes o desenvolvimento de atividades de forma dinâmica que abrange conceitos importantes da geometria plana na formação e desenvolvimento dos estudantes da Educação Básica.

Palavras-chave: pavimentação, isometrias, transformações no plano.

Introdução

Artista holandês nascido em 1898, Maurits Cornelis Escher, mais conhecido como Escher, ficou famoso por suas obras inusitadas, as quais abrangem conceitos matemáticos pertencentes ao campo da Geometria, de forma especial, as isometrias. Seus trabalhos, realizados na forma de quebra-cabeça, ficaram conhecidos como mosaicos por pavimentarem um plano seguindo um padrão que envolve diferentes combinações e figuras geométricas.

A arte dos mosaicos teve origem nas antigas civilizações, entre elas o Egito e a Mesopotâmia. A obra "Estandarte de Ur" (3500 a.C.) considerada, por grande parte dos

[1] Acadêmica do Curso de Matemática Licenciatura UNIJUI – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul.
[2] Acadêmica do Curso de Matemática Licenciatura UNIJUI – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul.
[3] Orientadora da produção. Atua como professora do Curso Matemática- DCEEng/UNIJUI.

historiadores, o mosaico mais antigo até então descoberto na Suméria, região sul da antiga Mesopotâmia, retrata, em suas duas faces, cenas de guerra e a vida doméstica desta civilização.

Neste sentido, a presente escrita tem por objetivo contribuir na organização do ensino de conceitos da geometria plana, de forma especial aos relacionados a formas e propriedades e transformações no plano. Apresenta-se, assim, o minicurso A arte matemática nas obras de Escher e discute-se o estabelecimento de processos de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos considerando aspectos das obras de Escher relacionados à pavimentação e isometrias.

Caminhos metodológicos

A metodologia utilizada no desenvolvimento deste minicurso denominado por *A arte matemática nas obras de Escher* se baseia nos conceitos de Polya (1995) contemplando as quatro fases de resolução de problemas: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e o retrospecto.

Os materiais didáticos utilizados no minicurso são peças em forma de primas com as bases indicadas como triângulo (vermelho), quadrado (rosa), pentágono (azul água), hexágono (roxo), heptágono (amarelo), octógono (azul marinho), eneágono (verde) e decágono (preto), os quais considera-se a face maior (base) de cada sólido construído pelas autoras utilizando-se como molde polígonos feitos no *software* GeoGebra através da ferramenta polígonos regulares tendo por valor de lado 12 cm.

O minicurso foi organizado em seis momentos principais, os quais marcam sua estrutura. Estes são apresentados na sequência, onde também estão explicitados possibilidades de reflexões e percepções pelos participantes no decorrer das proposições.

Momentos considerados no desenvolvimento do minicurso

No decorrer do planejamento do minicurso são consideradas ideias apresentadas por Polya (1995) relacionadas à resolução de problemas, as quais podem ser observados em cada um dos momentos descritos.

Primeiramente tem-se por objetivo a compreensão do problema pensado e exposto no minicurso e, para que isso aconteça, são propostas perguntas relativas ao que se pede na atividade como, por exemplo, quais os dados e condições disponíveis que podem ser utilizados no entendimento do problema e, posteriormente, sua resolução? Aconselha-se retirar as principais informações apresentadas, para que ocorra o aperfeiçoamento da compreensão. Após esclarecidas as dúvidas há o estabelecimento de um plano para a resolução do problema, ao qual tem por objetivo analisar o problema por pontos de vista diferentes construindo conexões entre os dados disponibilizados.

A execução do plano para a resolução do problema somente acontece quando há a certeza de como proceder em cada passo de forma correta utilizando o raciocínio de modo que se consegue mostrar claramente o que cada um dos passos representa, isto é, no momento em que sejam elaborados argumentos para validar o raciocínio utilizado ao resolver o problema apresentado. Já o retrospecto, considerado também no desenvolvimento do minicurso e nas atividades contempladas por ele, serve para questionar qual será a essência dos problemas apresentados no minicurso e como os participantes podem, de alguma forma, utilizar estes conhecimentos adquiridos em outros problemas futuramente.

Primeiro momento: contextualização de pavimentações

Inicialmente os alunos são organizados em quatro ou oito grupos, obedecendo a quantidade de participantes do minicurso. Este primeiro momento é marcado pela contextualização e exemplificação de tipos de pavimentações encontradas na natureza e produzidas pelo homem, as quais pode-se observar logo abaixo nas figuras 1, 2 e 3.

Figura 1 – Pavimentação observada em um casco de tartaruga

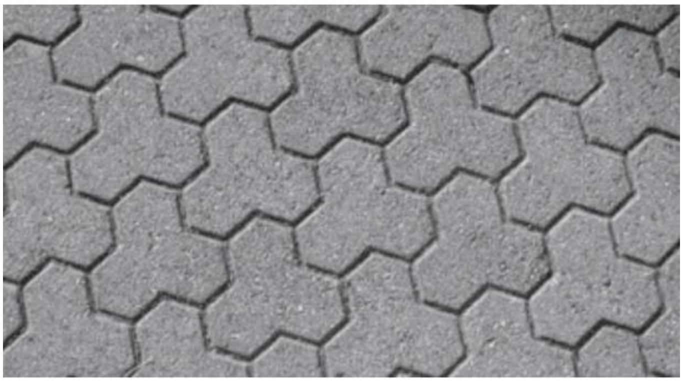
Fonte: Pagina Hypescience.[4]

[4] Disponível em <https://hypescience.com/a-estranha-origem-do-casco-da-tartaruga/> Acesso em: 31 de mai. 2019.

Figura 2 – Pavimentação observada em uma colmeia

Fonte: Pagina tecnologia e treinamento.[5]

Figura 3 – Pavimentação observada em uma calçada



Fonte: Pagina globo educação.[6]

Nessa etapa também deve-se considerar a participação dos alunos através de algumas perguntas, por exemplo, quais exemplos de pavimentação são observadas no cotidiano de cada um? Que tipo de forma é utilizada nesta pavimentação especifica? O que você entende por pavimentação? A partir destas perguntas, os participantes são conduzidos a refletir sobre as pavimentações e, através disso, o ministrante do minicurso deve aproveitar o momento para introduzir o conceito de pavimentação do plano ao qual consiste em cobrir completamente um plano sem que haja lacunas ou sobreposições entre

[5] Disponível em <https://www.tecnologiaetreinamento.com.br/abelhas-suinos/apicultura-abelhas-suinos/como-proteger-a-colmeia-contra-a-varroa> Acesso em: 31 de mai. 2019.
[6] Disponível em <http://educacao.globo.com/provas/enem-2011/questoes/151.html> Acesso em: 31 de mai. 2019.

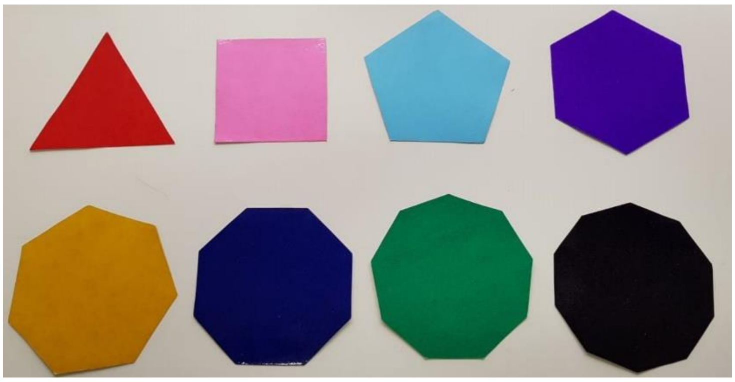
as formas utilizadas e que determinados tipos de pavimentação seguem um determinado padrão que a caracteriza.

Este momento introduz a resolução de problemas apresentado por Polya (1995), pois descreve o contexto ao qual as primeiras etapas do minicurso estão embasadas e, juntamente com os questionamentos, possibilita a compreensão dos problemas propostos.

Segundo momento: proposição do primeiro problema

Neste segundo momento deve-se entregar os materiais didáticos manipuláveis (figura 4) aos participantes do minicurso com a finalidade de que seja realizada a livre exploração dos mesmos objetivando o reconhecimento dos alunos com relação aos materiais que serão utilizados na atividade. Após este momento ocorrerá a introdução do primeiro problema proposto aos participantes: qual(is) o(s) polígono(s) convexo(s) regular(es) pode(m) ser usado(s) isoladamente como padrão de uma pavimentação caracterizada como lado-lado?

Figura 4 – Polígonos convexos regulares usados no minicurso



Fonte: As autoras, 2019.

Para a resolução deste problema o ministrante do minicurso deve explicar que uma pavimentação lado-lado possui três condições para constituir o padrão proposto que caracteriza este tipo de pavimentação do plano:

- Não podem haver lacunas nem sobreposições entre os polígonos.
- Se dois polígonos intersectam-se, então essa intersecção é um lado ou um vértice comum;
- A distribuição dos polígonos ao redor de cada vértice é sempre a mesma.

É neste momento que o aluno deve ser o protagonista e participar ativamente das ações realizadas em grupo com os materiais didáticos disponibilizados, construindo percepções sobre o porquê de alguns polígonos regulares possibilitarem uma pavimentação lado-lado e outros não.

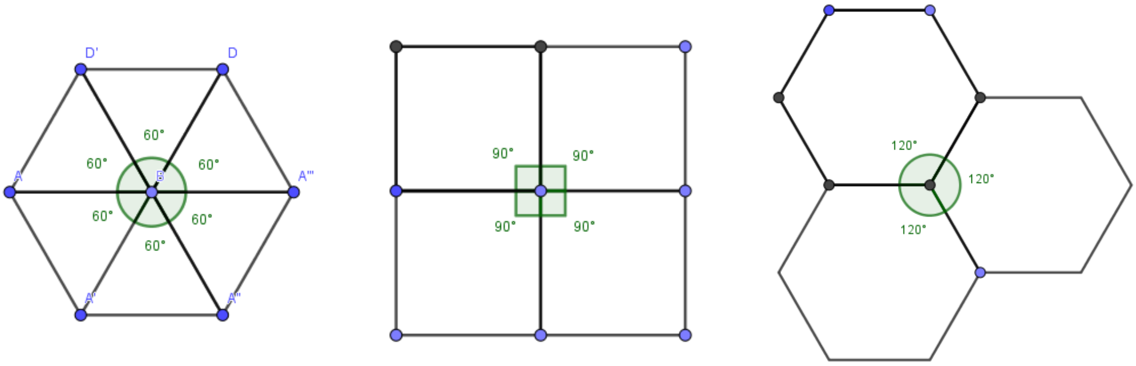
Após a realização da pavimentação do polígono pelo grupo, os alunos podem e devem trocar os materiais didáticos entre eles, para todos conseguirem visualizar quais possibilitam a pavimentação lado-lado – triângulo equilátero, quadrado e hexágono – e também debater sobre as percepções obtidas até o momento do porquê somente três polígonos regulares propiciam o revestimento de um plano. O ministrante do minicurso tem a função de questionar aos alunos quais características estes três polígonos têm que levam a ocorrência deste caso até os participantes concluíres que o ângulo interno é o que permite esta situação para assim dar início ao terceiro momento.

Neste momento é então apresentado o primeiro problema do minicurso e através das informações disponibilizadas pelo ministrante, os participantes têm a possibilidade de estabelecer um plano que tem por objetivo promover a resolução do problema. Para isso, os integrantes dos diferentes grupos devem estar em constante formulação de conjecturas para que ocorra debate de ideias entre os grupos com intervenções do ministrante quando necessário. Quando o estabelecimento do plano de resolução do problema estiver organizado ocorre a possibilidade de executá-lo.

Terceiro momento: discussão e análise do primeiro problema

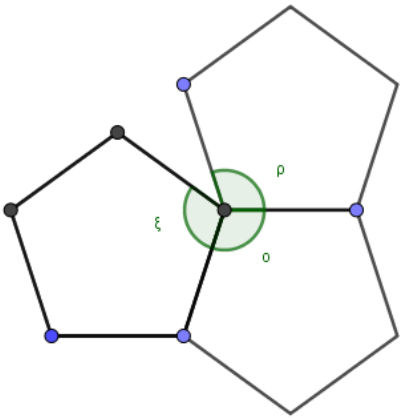
Este momento iniciará no instante em que os alunos percebem que o ângulo interno do triângulo equilátero (60º), quadrado (90º) e hexágono (120º) são divisores de 360º, que é ângulo que corresponde a uma volta completa (Figura 5). E agora, será que os participantes são capazes de dizer o valor do ângulo interno dos outros polígonos regulares (Figura 6) sem usar uma fórmula especifica? Para descobrir o valor do ângulo dos polígonos regulares que possibilitam uma pavimentação basta olhar quantos deles é necessário para cobrir o plano em volta de um único vértice e dividir 360º por esse valor correspondente, mas e os outros polígonos que levam a sobreposição de peças? Qual o método que o aluno iria utilizar para descobrir a que ângulo corresponde?

Figura 5 – Polígonos que possibilitam a pavimentação



Fonte: As autoras, 2019.

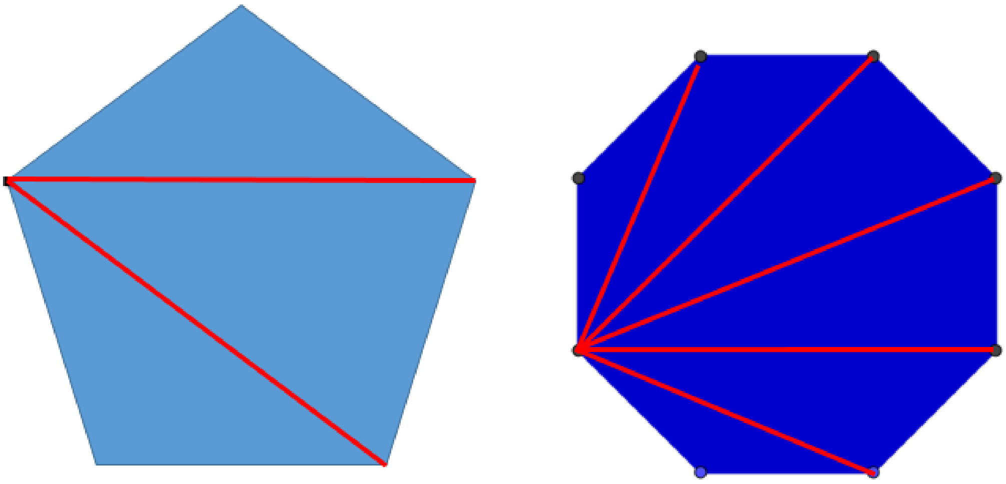
Figura 6 – Como descobrir o ângulo interno do pentágono?



Fonte: As autoras, 2019.

Neste momento o ministrante do minicurso deve introduzir o conceito de triangulação, ao qual corresponde ao ato de formar triângulos dentro do polígono traçando-se diagonais tendo como ponto de referência um dos vértices deste polígono, como pode-se analisar na figura 7.

Figura 7 – Triangulação em um pentágono e em um octógono



Fonte: As autoras, 2018.

Na exploração da triangulação os participantes tem possibilidades de perceber regularidades, dentre as quais, que o número de diagonais traçadas e triângulos formados é duas unidades menor se comparados com os lados (denominados como *n*) do respectivo polígono (*n-2*), como, por exemplo, no pentágono, que possui cinco lados, é possível traçar três diagonais e consequentemente formar somente três triângulos, já no octógono, que possui oito lados, é possível traças seis diagonais e consequentemente seis triângulos. A partir disso, o ministrante deve questionar aos alunos qual o valor da soma dos ângulos internos de um triangulo qualquer? Neste momento é aconselhável que o ministrante tenha disponível algum tipo de material didático manipulável que demonstre que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer sempre resultará em 180º, para aqueles alunos que não conseguem visualizar esse aspecto que o polígono apresenta.

Tendo as percepções das questões anteriores, o ministrante tem a função de perguntar aos participantes sobre como pode-se descobrir a soma dos ângulos internos de cada um dos polígonos disponibilizados no minicurso através das informações até então descobertas por eles mesmo. Os alunos devem perceber que ao multiplicar 180º (soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer formado no método de triangulação) pela quantidade de triângulos formados em cada polígono (*n-2*) tem-se o valor da soma desejada. Mas como podemos chegar ao valor exato do ângulo interno do polígono através destas informações? Basta dividir o valor resultante pelo número de lados (*n*) que o polígono correspondente possui. A partir destes questionamentos e paços desenvolvidos, o ministrante constrói com os alunos a fórmula utilizada para descobrir o ângulo (α) interno do polígono muitas vezes sem eles perceberem, demonstrando como a matemática pode ser interessante e lógica sem a utilização dos métodos de repetição de cálculos ocorridos, muitas vezes, dentro da sala de aula.

$$\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180^0}{n}$$

É de escolha do ministrante construir uma tabela com os participantes contendo os polígonos considerados no minicurso na primeira coluna, na segunda coluna o número de lados do polígono respectivo e na terceira a medida do ângulo interno deste polígono ou apresentar a mesma pronta da forma que desejar.

Com a discussão e análise da resolução do primeiro problema ocorre o retrospecto dos passos feitos pelos alunos através do plano de resolução traçado por eles para que ocorra a resolução do primeiro problema. Em seguida inicia-se novamente o processo de contextualização de como é possível encontra o ângulo dos demais polígonos regulares, questionamento que ajudará na resolução e desenvolvimento do segundo problema que será introduzido no minicurso e do desafio final, respectivamente.

Quarto momento: proposição do segundo problema

Logo após o ministrante do minicurso inserir os participantes nas atividades logicas apresentadas acima de uma forma dinâmica, deve-se fazer com que estes reflitam: Se apenas o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular podem ser usados isoladamente como padrão de pavimentação, como Escher produzia suas imagens (Figura 8) se as mesmas não aparentam usar qualquer um destes polígonos. Aqui está um erro?

Figura 8 – Obras de Escher

Ladrilhamento III / Tessellation III – 1957

Ladrilhamento IV / Tessellation IV – 1957

Ladrilhamento II/ Tessellation II – 1957

Fonte: A Magia de Escher, 2013.

A partir deste momento o ministrante deve introduzir um pouco da história de Escher aos participantes do minicurso, para contextualizar os mesmos e, logo após, apresentar algumas obras produzidas pelo artista durante sua carreira.

Quinto momento: contextualização das isometrias

Nascido em 7 de junho de 1898, Maurits Cornelis Escher é considerado um famoso artista holandês que inicialmente estudou arquitetura e, influenciado por um professor, passou a adotar técnicas de xilogravura e litografia – técnica de arte de relevo gravada em madeira e pedra, respectivamente – em suas obras, criando quebra-cabeças visuais que exploram padrões geométricos específicos em cada uma de suas artes gráficas modernas.

Ao ocorrer a análise das obras pelos alunos, os mesmos, muitas vezes, ficam incrédulos e dizem ser impossível de fazer uma pavimentação com somente o triângulo equilátero, quadrado e hexágono, questionam como o artista conseguiu esta façanha se em nenhuma das imagens é possível visualizar algum destes polígonos. Após estes questionamentos deve ser introduzida a ideia de isometrias no plano, denominadas por Wagner (1993) como transformações no plano que preservam distâncias.

As isometrias consideradas nas obras de Escher são translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante. Corroborando com Wagner (1993), a translação transforma uma figura em outra paralela e congruente, conservando uma direção, um sentido e um comprimento. A rotação é obtida através da fixação de um ponto (centro de rotação) e todos os outros se deslocam em um dado ângulo de amplitude em torno do ponto fixo, positiva quando deslocado no sentido anti-horário. A reflexão ocorre quando, ao ser traçado um eixo ou ponto de simetria, cada ponto da figura original é simétrico a figura congruente. E a reflexão deslizante segundo Lima (1996) é obtida pela reflexão seguida de translação e não possui ponto fixo.

Recomenda-se, neste momento, a apresentação de situações que envolvem transformações no plano enquanto define as mesmas e, após a conclusão destas explicações, deve ocorrer a introdução de vídeos[7] breves que apresentam as isometrias consideradas pelo artista.

[7] https://www.youtube.com/watch?v=NYGIhZ_HWfg; https://www.youtube.com/watch?v=T6L6bE_bTMo

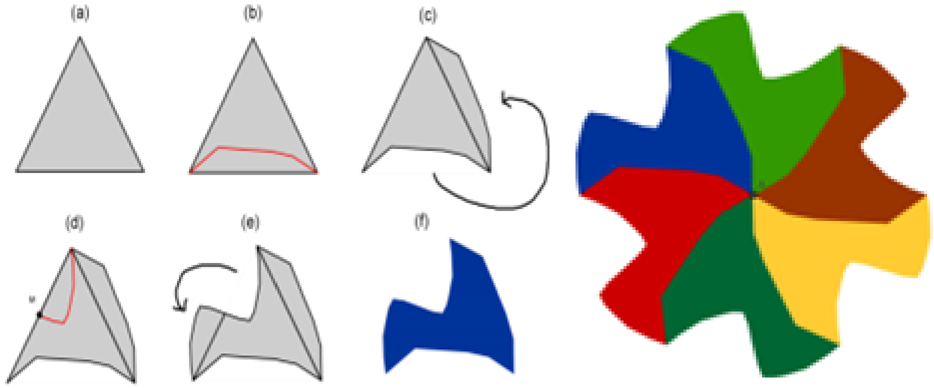
No quarto e quinto momento do minicurso ocorre a introdução do segundo problema e contextualização da história de Escher, respectivamente, dando continuidade à compreensão do problema iniciado no terceiro momento, o qual introduz como se calcula o ângulo interno de um polígono convexo regular. Juntamente com a contextualização, o ministrante introduz as isometrias no plano já respondendo o segundo problema com o intuito de desafiar os participantes a construir uma obra de arte com as técnicas de Escher.

Sexto momento: proposição do desafio de produção da obra de arte

Para concluir a minicurso, o ministrante deve propor que os participantes produzam uma obra de arte utilizando uma das técnicas de Escher a partir de rotações feitas em um triângulo equilátero. Importante destacar que o ministrante pode escolher entre levar pronto o triângulo equilátero para o desenvolvimento deste momento ou construir o mesmo com os participantes utilizando materiais como régua, compasso e transferidor. No planejamento deste minicurso as autoras escolheram por deixar os triângulos pronto com o intuito de otimizar o tempo.

- Determinar um dos vértices como centro de rotação e marcar o ponto médio M do lado oposto a este vértice;
- A partir do vértice escolhido, deve-se desenhar uma figura qualquer com início no centro de rotação e final no vértice consecutivo a ele;
- Recortar esta figura e rotacionar ela tendo como ponto de referência o centro de rotação escolhido inicialmente;
- Desenhar uma nova figura qualquer com início em um dos vértices do segmento que contempla o ponto M e final no próprio ponto M;
- Recortar esta figura e rotacionar a mesma tendo como centro de rotação o ponto M;
- Utilizando como plano uma folha A4 em branco, deve-se contornar o polígono resultante para ter esta figura como base para a pavimentação da obra de arte;
- Para cobrir o plano, é necessário destacar e utilizar o centro de rotação indicado no primeiro item da atividade na figura base desenhada no plano e, a partir dela, rotacionar o molde em torno do centro de rotação, formando assim a obra final;
- Colorir e decorar a obra utilizando a criatividade.

Figura 9 – Pavimentação construída a partir de um triângulo equilátero



Fonte: Acervo das autoras, 2019

Para finalizar as etapas de resolução de problemas de Polya (1995) do minicurso, o ministrante disponibiliza as informações necessárias para que cada participante trace seu plano de resolução do desafio da sua maneira ao mesmo tempo em que deve ocorrer o retrospecto não somente do que foi abordado no segundo problema, mas sim no minicurso como um todo para que haja a possibilidade de uma melhor compreensão e também resolução do desafio proposto. Se necessário o ministrante deve intervir tanto no plano de resolução quanto no retrospecto para auxiliar o aluno.

Considerações Finais

A partir do planejamento e escrita deste minicurso espera-se uma melhor percepção de como os participantes procuram pensar e compreender alguns conceitos matemáticas da geometria. Entende-se que a metodologia de resolução de problemas amplia as possibilidades de o participante compreender aspectos da geometria abordados no minicurso, pois proporciona a compreensão do problema, o estabelecimento de um plano, a execução do plano e o retrospecto de todos os passos desempenhados. A partir disso, é possível concluir que as atividades propostas no decorrer do minicurso são potenciais para o ensino dos conceitos matemáticos relacionados à Isometria em sala de aula ampliando possibilidades de estabelecimento de processos de aprendizagem.

Agradecimentos

Primeiramente gostaríamos de agradecer o Curso de Matemática – Licenciatura da Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul – UNIJUÍ por

proporcionar momentos que contemplem a participação em eventos que encorajam a procura de novas aprendizagens e formas de ensinar e aprender a matemática e os professores por sempre auxiliar e orientar quando necessário e por incentivar a procura e ampliação de novos saberes sempre que possível, desejamos nosso muito obrigada a todos.

Referências

LIMA, Elon Lages. **Isometrias**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

OLIVEIRA, Andréa. **Como proteger a colmeia contra a varroa**. Disponível em: https://www.tecnologiaetreinamento.com.br/abelhas-suinos/apicultura-abelhas-suinos/como-proteger-a-colmeia-contra-a-varroa Acesso em: 31 mai. 2019., il.

POLYA, G. Parte 1: Em aula. In: POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. P. 1- 15.

QUESTÃO 151 – ENEM 2011. Disponível em: http://educacao.globo.com/provas/enem-2011/questoes/151.html Acesso em: 31 mai. 2019., il.

SOUZA, Guilherme. **Como surgiu o casco da tartaruga.** Disponível em: https://hypescience.com/a-estranha-origem-do-casco-da-tartaruga/ Acesso em: 31 mai. 2019., il.

TJABBES, Pieter. **A Magia de Escher**. São Paulo: Art Unlimited, 2013, il.

WAGNER, Eduardo. **Construções Geométricas**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1993.