Área da superfície esférica e volume de uma esfera: uma proposta metodológica de ensino no 3º ano do Ensino Médio

Franciéli da Silva[1]

Silvio Luiz Martins Britto[2]

Resumo

O artigo tem por objetivo discutir os conceitos históricos, algébricos e geométricos presentes nos cálculos de área da superfície esférica e volume de uma esfera. Trata-se de uma pesquisa de cunho qualitativo em que o público-alvo são os alunos do Ensino Médio no que se refere à compreensão, entendimento e aplicação desses conceitos, levando em consideração as metodologias apresentadas pelos professores de Matemática em sala de aula. A proposta apresenta diferentes alternativas que podem ser utilizadas por professores e futuros professores de Matemática em relação à abordagem desses conteúdos em sala de aula. Dentro do que será proposto, salienta-se o construtivismo para a instigação e organização dos conhecimentos, utilizando-se do que é manipulável e da troca de ações vivenciadas durante as aulas. Diante disso, pretende-se desenvolver uma oficina objetivando trabalhar tais conceitos, utilizando-se a construção de material concreto para demonstração e dedução das expressões utilizadas no cálculo da área da superfície esférica e do volume de uma esfera, com professores e futuros professores de Matemática participantes da II Conferência Nacional de Educação Matemática. Durante o desenvolvimento da oficina, serão observados os métodos utilizados pelos professores na construção e na aplicação de tais conceitos. Ao final, será sugerido, aos participantes, responderem um instrumento de pesquisa, que objetiva obter informações quanto à validade da proposta, quanto às metodologias utilizadas pela pesquisadora.

Palavras-chave: Ensino de Geometria. Estudo da Esfera. Área e Volume.

Introdução

O interesse por abordar o estudo dos conceitos relacionados à esfera surgiu a partir das aulas da disciplina de Geometria II. As estratégias utilizadas pelo professor despertaram

---

[1]Acadêmica do curso de Licenciatura plena em Matemática das Faculdades Integradas de Taquara – Faccat. francielisilva@sou.faccat.br

[2] Doutor em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Luterana do Brasil – ULBRA/Canoas/RS. Pós-doutorando no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PPGECIM – da Universidade Luterana do Brasil – ULBRA/Canoas/RS. Membro do Grupo de Pesquisas sobre Formação de Professores de Matemática – GPFPMat. Professor do curso de Licenciatura em Matemática das Faculdades Integradas de Taquara – FACCAT. E-mail: silviobritto@faccat.br.

o desejo de aprofundar os conhecimentos sobre o assunto. Além do interesse pelos estudos sobre conceitos algébricos e geométricos no campo da geometria espacial, surgiu a curiosidade de investigar as metodologias utilizadas pelos professores, quando abordam esses conteúdos com alunos do Ensino Médio. Diante disso, a intenção de propor uma oficina com professores e futuros professores de Matemática foi sendo construída no desenrolar da investigação, tendo em vista a importância do uso de materiais concretos e manipuláveis para a potencialização do ensino desses conceitos. Para isso, desenvolveu-se uma proposta objetivando socializar algumas alternativas de ensino no que se refere à área da superfície esférica e do volume da esfera, utilizando material concreto e estratégias de fácil entendimento e compreensão.

Trata-se de uma pesquisa de caráter qualitativo, apoiada em autores que descrevem o assunto em questão. Nas atividades sugeridas, buscam-se explorar as vivências particulares além das experiências em sala de aula dos professores participantes do evento, a fim de obter dados que ajudem a amenizar os problemas de compreensão e entendimento desse conteúdo. Portanto, a proposta objetiva abordar os saberes históricos, algébricos e geométricos que envolvem a esfera para utilização desses, de forma lúdica, no que se refere ao ensino da geometria em sala de aula com alunos do Ensino Médio.

História do pensamento sobre a esfera

Arriscar alguma afirmação sobre a origem da Matemática, seja no campo da aritmética, seja no campo da geometria é algo não muito comum, uma vez que os primórdios sobre essa área do conhecimento surgiram antes mesmo da escrita. Ao longo de sua história, descrita por milhares de anos, apenas os últimos seis milênios foram registrados pelo homem, que, por sua vez, registrou e descreveu seus pensamentos.

Para Boyer (1999, p.4), “Para informações sobre a pré-história dependemos de interpretações baseadas nos poucos artefatos que restaram de evidências fornecidas pela moderna antropologia, e de extrapolação retroativa, conjetural, a partir dos documentos que sobreviveram”. Diante disso, nota-se que se trata de informações muito antigas, até mesmo anteriores à Civilização Egípcia. Segundo Heródoto, acreditava-se que a geometria havia se originado a partir da necessidade de fazer novas medições de terras após as inundações anuais no vale do rio. Por outro lado, Aristóteles acreditava que o estudo da geometria havia sido conduzido devido a uma classe sacerdotal como lazer. Portanto, observam-se duas teorias totalmente opostas: uma que acredita que a geometria surgiu da necessidade prática e outra que a geometria surgiu nos momentos de lazer sacerdotal e nos rituais.

Os geômetras egípcios muitas vezes eram tomados como "estiradores de corda" (ou agrimensores), o que apoia qualquer uma das duas teorias. Isso porque cordas eram muito usadas tanto para traçar as bases dos templos quanto para remarcar e realinhar as demarcações das terras.

> Não podemos contradizer nem Heródoto nem Aristóteles quanto à motivação que produziu a matemática, mas é claro que ambos subestimaram a idade do assunto. O homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porém seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para a geometria. (BOYER, 1999, p. 5).

Diante disso, percebem-se exemplos de congruência e simetria, que basicamente são partes da geometria elementar, registrados em potes, tecidos e cestas que eram produzidos para uso pessoal. Porém, para o período que engloba toda a pré-história, não há documentos que evidenciam tais informações. Logo, Boyer (1999) afirma não ser possível acompanhar a evolução matemática de um simples desenho até mesmo um teorema familiar.

Dentre os documentos já descobertos até os dias de hoje, os mais conhecidos são os papiros. Como afirma Eves (2002, p.75), "Vinte e seis dos 110 problemas dos papiros de Moscou e Rhind (ou Ahmes) são geométricos.", na maior parte com fórmulas para o cálculo de áreas de terras e volume de grãos.

No papiro de Moscou, encontra-se uma questão referente ao cálculo da superfície de um cesto. Essa talvez seja uma das primeiras questões registradas com noções de cálculos que envolvam algo parecido com a estimativa da área de uma superfície curva ou até mesmo o pensamento que envolve a metade de uma esfera (BOYER, 1999).

Nessa questão, denominada "Problema 10", como descreve Boyer (1999, p.14), sugere-se a área de uma superfície que lembra um cesto com um diâmetro $4\frac{1}{2}$, levando em consideração a fórmula $S = (1 - \frac{1}{9})^2(2x)x$, em que$x = 4\frac{1}{2}$, que chegava ao valor de 32 unidades. Como a aproximação egípcia do valor de $\frac{\pi}{4}$ é$(1 - \frac{1}{9})^2$, as 32 unidades encontradas anteriormente corresponderiam à superfície de um hemisfério de diâmetro $(4\frac{1}{2})$. Essa foi a interpretação dada a esse problema datado em 1930. Acreditava-se na possibilidade de ser um cálculo para avaliação do teto de um celeiro em forma de cúpula, ou de algo semelhante a meio cilindro de forma mais grosseira.

A seguir, descrevem-se os passos para a resolução do problema 10 presente no papiro de Moscou (BOYER, 1999, p.14):

$$S = \left(1 - \frac{1}{9}\right)^2 (2x)x \Rightarrow S = \left(\frac{9-1}{9}\right)^2 (2x^2) \Rightarrow S = \left(\frac{8}{9}\right)^2 (2x^2) \Rightarrow$$

$$S = 2\left(\frac{8}{9}\right)^2 x^2 \Rightarrow S = 2\left(\frac{64}{81}\right) x^2 \Rightarrow S = \frac{128x^2}{81}$$

Sendo $x = 4 + \frac{1}{2}$

$$S = \frac{128.\left(4+\frac{1}{2}\right)^2}{81} \Rightarrow S = \frac{129.\left(\frac{81}{4}\right)}{81} \Rightarrow S = \frac{\frac{10368}{4}}{81} \Rightarrow S = \frac{10368}{4}.\frac{1}{81} \Rightarrow S = \frac{10368}{324}$$

$$S = 32\ unidades\ de\ \acute{a}rea$$

Pelo exemplo descrito, é possível observar a presença do π. Demonstrando a grande importância do seu cálculo, Eves (2002) relata uma breve cronologia da busca por aproximações exatas de seu valor.

Já em 240 a. C. iniciavam-se as tentativas científicas do cálculo do π. Antes mesmo dessa data, usava-se o número 3 como um valor aproximado. Passaram-se séculos e vários cálculos de aproximações do número correto que representasse π foram surgindo. Arquimedes obteve, por meio de cálculos que envolviam polígonos regulares inscritos no círculo, limites que se aproximariam do valor de π, situado entre 22371 e 227 ou que, até a segunda casa decimal, π é dado por 3,14. Esse trabalho encontra-se no tratado de Arquimedes e se intitula *"A medida de um círculo"*, apontado por Eves (2002). Esse método, baseado nos polígonos regulares inscritos e circunscritos, é conhecido como *"Método clássico de calcular o π"*.

Ao longo dos anos, foram surgindo diversas aproximações com muitas casas decimais, como o cálculo de Zacharias Dase que encontrou π utilizando até a ducentésima casa decimal usando a série de Gregory[3]. Nessa trajetória de cálculos de aproximações para π, surgiram as máquinas de calcular, capazes de informar muitas casas decimais. Foi assim que, em 1986, D. H. Bailey da NASA fez funcionar um supercomputador "Cray-2" por 28 horas para obter π com 29.360.000 dígitos. Antes disso, em 1717, provou-se que π é um número irracional.

---

[3]James Gregory obteve a série infinita arctg x=x-x33+x55-x77+… (-1≤x≤+1), em 1671, fórmula que deu suporte para vários matemáticos nos cálculos para aproximações, durante a história. (EVES,2002, p. 144)

A geometria espacial dos Elementos de Euclides

O matemático Euclides passou a ser conhecido quando se reuniram "as melhores mentes pensantes", como aponta Garbi (2010, p. 57), na organização da Universidade de Alexandria. Não há informações sobre o nascimento ou mesmo a morte do matemático, mas se acredita que ele tenha sido aluno de Platão. Foi nessa universidade que Euclides ensinou e escreveu "Os Elementos", em 13 livros, que ainda hoje vigoram nos estudos da geometria. A obra de Euclides perde somente para a Bíblia em número de edições, sendo considerado o mais influente livro sobre Matemática de todos os tempos. Garbi (2010, p. 78) afirma que Albert Einstein (1879-1955) exprimiu: "Se Euclides não conseguiu acender seu entusiasmo juvenil então você não nasceu para ser um pensador científico".

Dentre os 13 livros escritos, Euclides dedicou três deles à geometria espacial. Diante dos preceitos teóricos existentes, mais especificamente a esses livros dedicados à geometria espacial, iniciam-se as investigações sobre os sólidos geométricos, de modo especial os que tratam da esfera.

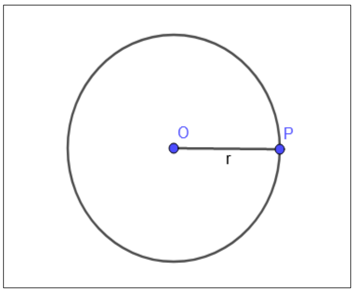
> Tudo que tem comprimento, largura e profundidade é um sólido;
> Esfera é a figura que se compreende quando: o diâmetro do semicírculo permanece fixo, o semicírculo faz uma rotação completa;
> O eixo da esfera é a reta que permanece fixa enquanto o semicírculo rotacional à sua volta;
> O centro da esfera é o mesmo do semicírculo;
> O diâmetro da esfera é uma reta traçada de um lado a outro da esfera, passando pelo centro. (BICUDO, 2009, p. 481).

Como relata Garbi (2010), "Os Elementos" são uma grande síntese de teoremas descobertos por vários geômetras. Além de Euclides ter provado várias de suas teorias originais, foi por conta da organização da lógica e preenchimento de certas lacunas que teorias de vários estudiosos foram provadas e descritas nos livros. Da mesma forma, algumas teorias, cálculos mais desenvolvidos e com exatidão, surgiram muito depois dos Elementos, como, por exemplo, um cálculo mais exato para o valor de π, que aconteceu somente um século depois, com Arquimedes.

Área da superfície esférica e volume da esfera

De um modo geral, tem-se que: "Dados um ponto O e um número real r positivo, o conjunto de todos os pontos P do espaço, com distâncias iguais de r do ponto O, é intitulado superfície esférica de centro O e raio r", como explana Giovanni, Bonjorno e Giovanni JR. (2002, p. 438). Na Figura 1 a seguir, apresenta-se esse conceito descrito pelos autores.

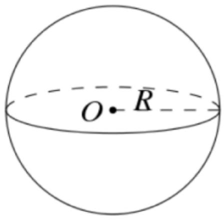
Figura 1- Superfície esférica



Fonte: A pesquisa (2019).

Observa-se que o sólido envolto pela superfície esférica se chama esfera. Logo, a esfera de centro O e o raio r são constituídos pelo conjunto de pontos do espaço cujas distâncias do ponto O são menores ou iguais a r. De modo ilustrativo, pode-se dizer que a superfície esférica é a "casca" da esfera, enquanto a própria esfera é a junção da "casca" com o "miolo", descrito por Giovanni, Bonjorno e Giovanni JR. (2002, p. 438).

Figura 2- Esfera de centro O e raio r e o círculo máximo



Fonte: https://querobolsa.com.br/enem/matematica/esferaAcesso em: 11 maio 2019.

Em uma esfera, quando seccionada por um plano, obtêm-se diversas circunferências sobre a sua superfície que podem ter raios distintos. A maior circunferência, assim obtida em uma esfera, que tem o mesmo centro O dessa esfera, é denominada circunferência máxima, ou círculo máximo, como descrevem Giovanni, Bonjorno e Giovanni JR. (2002).

Arquimedes e seus estudos sobre a esfera e o cilindro

Arquimedes nasceu em Siracusa no ano de 287 a C. e viveu por 75 anos. Era filho de um astrônomo e estudou em Alexandria, onde estendeu as fronteiras da Matemática. Segundo Garbi (2010, p. 80), dentre as várias obras escritas por Arquimedes, o livro “Sobre a Esfera e o Cilindro” traz enfoques que Euclides não descrevia em “Os Elementos”, além de ideias profundas descritas com clareza e rigor.

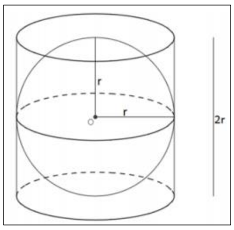
Arquimedes havia encontrado uma forma rigorosa de calcular e determinar, com precisão, o valor de πe dos coeficientes de proporcionalidade relativos aos cálculos de área e volume da esfera, um dos vários campos em que o matemático focalizou seus talentos.

Evidenciando o tratado Sobre a Esfera e o Cilindro, observou-se ainda uma elegante síntese de seus estudos sobre o cone, o cilindro e a esfera.

> Inscrevendo uma esfera em um cilindro equilátero, ele mostrou que a área total e o volume do cilindro são, respectivamente,$\frac{3}{2}$ da área e do volume da esfera. Isso permitiu-lhe enunciar o seguinte teorema: “O cilindro é uma vez e meia a Esfera, em área e volume”. Arquimedes considerava essa sua mais bela descoberta, tanto que pediu que, quando morresse, sobre seu túmulo fossem gravados um cilindro e uma esfera nele inscrito, acompanhados da relação $\frac{3}{2}$ que os une. (GARBI, 2010, p. 90, grifo do autor).

Essa relação equivale aos enunciados mais conhecidos dos cálculos de área da superfície esférica e volume da esfera.

Figura 3- Relação $\frac{3}{2}$ de Arquimedes



Fonte: https://www.udesc.br/arquivos/udesc/id_cpmenu/6221/18_15035696954909_6221.pdf. Acesso em: 20 maio 2019.

O excerto relatado na Figura 3 ilustra a referida relação entre a área total (Atc) e o volume do cilindro (Vc) com a área da superfície esférica (Ase) e o volume da esfera (Ve). Essa constatação é apontada por Garbi (2010, p. 90) ao descrever que, na sepultura de Arquimedes, encontra-se a referida relação transcrita a seguir:

$$\frac{Ve}{Vc} = \frac{Ase}{Atc} = \frac{2}{3} \Rightarrow Vc = \frac{3}{2}Ve$$

Logo, dos atributos que distinguem os gênios das pessoas comuns, a capacidade de perceber correlação entre campos aparentemente dissociados é a intuição. Para Garbi (2010, p. 89), “[...] quem, se não um gênio, poderia imaginar a possibilidade de encontrar o volume da Esfera por meio do equilíbrio [...]”. Essa visão interior que faz ver “além dos olhos” levava Arquimedes a analisar certos tipos de conjuntos na procura de realizar uma descoberta.

A importância do construtivismo em sala de aula

Segundo Félix (2001, p. 121), o construtivismo “[...] parte do princípio de que o desenvolvimento da inteligência é determinado pelas ações mútuas entre o indivíduo e o meio em que está inserido”. Todo conhecimento é produto dos atos cognitivos para com o modo como realmente as coisas são.

Além disso, Félix (2001, p. 121) afirma que, a partir da década de 60, o construtivismo se desenvolveu no Brasil. Conforme o teórico, essa teoria cresceu com enfoque teórico significativo utilizando materiais concretos e a construção dos conceitos, com as operações envolvidas, usando blocos lógicos e conjuntos.

Diferentes obras e grupos de estudos alavancam o pensamento que vê a Matemática como uma construção humana, com relações abstratas e grande ênfase nos processos que se dão pela relação com objetos ou com ideias já construídas. O autor ainda salienta que, na teoria de Piaget, os primórdios da inteligência verbal ou refletida se baseiam em uma “inteligência prática” que se apoia nos hábitos, nas manipulações, nas associações e na interação com o meio.

Metodologia

A proposta objetiva abordar, através de uma oficina, conceitos algébricos e geométricos utilizados nos cálculos da área da superfície esférica e volume de uma esfera. Além disso, será sugerida, aos participantes da oficina, a construção de uma esfera a partir de pirâmides pentagonais e hexagonais (icosaedro truncado), para demonstração de aproximações de área da superfície esférica e volume de uma esfera, além de uma clepsidra, utilizando-se do Princípio de Cavalieri na dedução da fórmula do volume de uma esfera.

Também serão relatados aspectos históricos, observando uma ordem cronológica do assunto investigado, desde os seus primórdios, no que se refere aos avanços alcançados em relação à área da superfície esférica e do volume da esfera. Far-se-á um breve relato da cunha esférica e do fuso esférico, conhecimentos que já não são mais abordados na maioria das escolas de Ensino Médio, mas que ainda aparecem em questões de vestibulares em instituições superiores.

As atividades serão finalizadas com situações problema, de modo provocativo, a serem desenvolvidas pelos participantes, objetivando a aplicação dos conceitos e discussões trabalhados durante a oficina. Ressalta-se que o foco da atividade é a construção dos sólidos utilizando-se material concreto e manipulação desses materiais, nesse caso, não serão utilizados *softwares* para tais demonstrações, porém são recursos de grande valia para o ensino da geometria.

Ao término das atividades, será entregue aos participantes da oficina um instrumento de pesquisa constituído de questões dissertativas e de múltipla escolha, quanto à validade da proposta, no que se refere às estratégias utilizadas. Os dados coletados serão analisados, servindo de suporte para a monografia de conclusão de curso da pesquisadora.

Procedimentos metodológicos

Após um breve relato dos conceitos históricos, serão transcritas as deduções de acordo com os conceitos algébricos pesquisados, com auxílio do material concreto construído. A seguir, segue o relato das atividades sugeridas.

Dedução da fórmula do cálculo da área da superfície esférica segundo Arquimedes

De acordo com a relação de Arquimedes, pode-se conferir a fórmula do cálculo da área da superfície esférica (Ase) comparando uma esfera de raio r com a área de um cilindro (Ac) reto de altura $(h)2r$. Diante disso, segue, passo a passo, a demonstração:

$$\frac{Ase}{Ac} = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{Logo, } Ase = \frac{2}{3}Ac$$

$$Ac = Ab + Al \;\Rightarrow\; Onde\;\; Ab = 2.\pi.r^2 e\; Al = 2.\pi.r.h \Rightarrow\; Portanto,$$

$$Ac = 2.\pi.r^2 + 2\pi.r.h$$

Substituindo na relação inicial, tem-se que:

$$Ase = \frac{2}{3}(Ab + Al) \Rightarrow\; Logo\; Ase = \frac{2}{3}(2.\pi.r^2 + 2.\pi.r.h)$$

Considerando que um cilindro reto apresenta$altura\;(h) = 2r$, tem-se:

$$Ase = \frac{2}{3}(2.\pi.r^2 + 2.\pi.r.2.r) \Rightarrow \ Logo,$$

$$Ase = \frac{2}{3}(2.\pi.r^2 + 4.\pi.r^2) \Rightarrow \ Portanto \ Ase = \frac{2}{3}(6.\pi.r^2)$$

$$Ase = \frac{12}{3}\pi.r^2 \Rightarrow \ \ Ase = 4\pi r^2$$

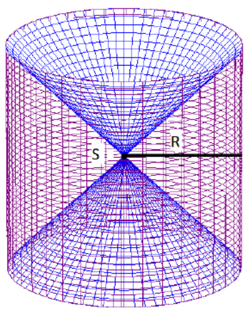
Levando em consideração os preceitos teóricos abordados para demonstrar a área da superfície esférica, verifica-se a possibilidade de utilizar diferentes procedimentos. Ressalta-se que a referida área nada mais é que a “casca” da esfera.

Volume de uma esfera pelo Princípio de Cavalieri

A mesma sistemática utilizada para obter a fórmula para o cálculo da área da esfera será utilizada para obter a fórmula para o cálculo de volume. Utilizando-se o sólido construído na oficina, faz-se a demonstração recorrendo ao Princípio de Cavalieri.

Segundo Bianchini e Paccola (1993), para determinar o volume da esfera, deve-se considerar um sólido em forma de cilindro reto, de altura $(h)\ 2r$ e um sólido formado por dois cones retos de altura $(h)\ r$ que se tocam no vértice (Clépsidra), com suas bases nos círculos que limitam o cilindro. Uma vez retirada a clépsidra desse cilindro, será obtida a anticlépsidra.

Figura 4 - Anticlépsidra



Fonte: Polyana Benk *et al.* (2016, p. 685)

Considerando o Princípio de Cavalieri, que afirma que o volume de uma esfera (Ve) é igual ao volume da anticlépsidra $(Vacl)$, faz-se a seguinte demonstração:

$$Ve = Vacl \Rightarrow \ Onde \ Vacl = Vc - Vcl$$

$$Onde \ o \ volume \ do \ cilindro(Vc) = Ab.h \ \ e \ volume \ do \ cone(Vcl) = 2(Vcone)$$

Considerando um cilindro reto de altura $(h)2r$, tem-se:

$$Vc = \pi.r^2.2.r \ \Rightarrow \ Logo \ Vc = 2.\pi.r^3$$

Considerando que a base do cone seja um círculo de raio r e a altura (h) também seja r, tem-se:

$$Vcone = \frac{Ab.h}{3} \Rightarrow \ Onde\ \text{á}rea\ da\ base\ (Ab) = \pi.r^2$$

$$Temos\ que\ Vcone = \frac{\pi.r^2.r}{3} \Rightarrow \ Vcone = \frac{\pi.r^3}{3}$$

Substituindo na equação inicial$Ve = Vc - 2(Vcone)$, tem-se que:

$$Ve = 2.\pi.r^3 - 2(\frac{\pi.r^3}{3}) \ \Rightarrow \ Logo\ Ve = \frac{6\pi.r^3 - 2.\pi.r^3}{3}$$

Diante disso, tem-se que:

$$Ve = \frac{4.\pi.r^3}{3}$$

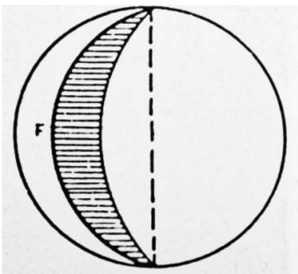
Os passos utilizados para a demonstração revelam a presença de várias expressões usadas no estudo da geometria no Ensino Médio. Diante disso, tal demonstração pode vir a ser um instrumento metodológico significativo a ser contemplado para introduzir o volume de uma esfera com esses alunos.

Fuso esférico e Cunha esférica

No ensino da geometria, em nível médio, não é abordado o fuso e a cunha. Porém, levando em consideração a presença desses conteúdos em livros didáticos e a presença de questões envolvendo esses conteúdos, de forma sucinta, será analisado o conceito de cunha esférica e fuso esférico.

Segundo Basso e Santos (s/d, p. 153), “Fuso esférico é cada uma das porções de superfície esférica, compreendidas entre duas semicircunferências máximas dessa superfície esférica de diâmetro comum.”.

Figura 5 –Fuso esférico



Fonte: Basso; Santos (s/d, p. 153).

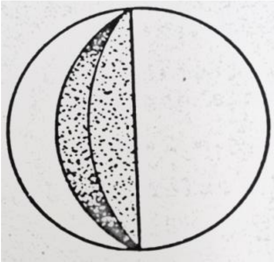
Para o cálculo da área do fuso esférico, Lezzi*et al.* (2002, p. 256) afirmam que “[...] quanto maior o ângulo α, maior será o fuso correspondente[...]”. Logo, a área do fuso esférico é diretamente proporcional ao ângulo α, sendo assim, faz-se uso da regra de três simples.

Portanto, considerando uma esfera completa de 360° e área da superfície esférica $4\pi r^2$, tem-se:

$$\frac{360°}{\alpha} = \frac{4\pi r^2}{A_{fuso}}$$

Já “Cunha esférica é uma porção de esfera limitada por um fuso esférico e por dois semiplanos das semicircunferências máximas que determinam o fuso esférico”. (BASSO; SANTOS, s/d, p. 160)

Figura 6 – Cunha esférica



Fonte: Basso; Santos (s/d, p. 160).

Para o cálculo do volume da cunha esférica, segundo Lezzi *et al.* (2002, p.526), “[...] quanto maior for o ângulo α, maior será o volume da cunha correspondente [...]”. Logo, o volume da cunha esférica é diretamente proporcional ao ângulo α.

Portanto, pode-se utilizar a regra de três simples, como no cálculo da área do fuso esférico.

Portanto, considerando uma esfera completa de 360° e volume $\frac{4\pi r^3}{3}$, tem-se:

$$\frac{360°}{\alpha} = \frac{\frac{4\pi r^3}{3}}{V_{cunha}}$$

A partir das transcrições do fuso esférico e da cunha esférica, pode-se observar que, por proporcionalidade, as respectivas porções calculadas nada mais são do que “pedaços” de uma esfera completa. Logo, obtêm-se tais valores com cálculos de fácil compreensão e entendimento.

Aproximação do cálculo da área e volume da esfera por pirâmides

Dentre as várias possibilidades de se alcançar o valor aproximado de área e volume da esfera, sugere-se a utilização de uma bola de futebol para tal demonstração. A partir do uso de material construído e elaborado para a oficina, serão realizados cálculos com aproximações da área da superfície esférica e do volume da esfera, levando em consideração as dimensões da esfera construída.

Partindo das fórmulas demonstradas anteriormente, seguem os cálculos das aproximações, desenvolvidos com o material proposto na oficina. Levando em consideração que a soma do volume de n pirâmides(Vp_n) de altura $h = raio\ da\ esfera$ corresponde ao valor aproximado do valor do volume de uma esfera de raio r, tem-se que:

$$Ve = (Vp_1 + Vp_2 + Vp_3 + \ldots + Vp_n)$$

$$Sendo\ Ve = \frac{4.\pi.r^3}{3} \Rightarrow\ e\ \ Vp = \frac{Ab.h}{3}$$

Ressalta-se que, para a demonstração, serão utilizadas 12 pirâmides de base pentagonal e 20 pirâmides de base hexagonal, para calcular a área da base (Ab)tanto pentagonal quanto hexagonal, sendo esses polígonos regulares. Logo:

$$Apr = \frac{P.a}{2} \Rightarrow\ \ Onde\ "P"\ é\ o\ perímetro\ do\ polígono\ e\ "a"\ é\ o\ apótema$$

$$P = soma\ de\ todos\ os\ lados\ e\ \alpha = \frac{\frac{l}{2}}{tan\theta}$$

Além disso, sabendo-se que os polígonos em questão são regulares, tem-se:

$$Base\ pentagonal: A_p = \frac{(5.n).\frac{l}{2.tan\ 36°}}{2}$$

$$Base\ hexagonal: A_h = \frac{(6.n).\frac{l}{2.tan\ 30°}}{2}$$

A demonstração apresentada aponta a possibilidade de obter aproximações de área e volume de uma esfera com a soma de outros sólidos, no exemplo, utilizando pirâmides. Portanto, as estratégias metodológicas que podem ser aproveitadas são várias. Uma proposta interessante a ser usada trata-se da bola de futebol, tão comum e conhecida por todos os educandos.

Considerações finais

Considerando os conceitos históricos, algébricos e geométricos, abordados durante a investigação, verificou-se a importância da utilização dos cálculos de área da superfície esférica e volume da esfera, presentes desde os primórdios da civilização. A necessidade de medir terras e outros tantos objetos do dia a dia aflorava no ser humano a necessidade de explorar os conceitos geométricos e sua aplicabilidade.

Após cursar as disciplinas de geometria, no curso de Matemática da FACCAT, de Taquara, RS, sentiu-se a necessidade de explorar, através da monografia de conclusão de curso da acadêmica, a busca por diferentes metodologias e estratégias para trabalhar geometria, em especial o estudo da esfera no Ensino Médio. Diante disso, por meio de uma oficina, apresentar-se-ão algumas alternativas metodológicas, de modo prático e útil, junto aos professores e futuros professores de Matemática participantes da II Conferência Nacional de Educação Matemática. Os resultados dessa proposta serão obtidos pelo relato dos participantes do evento através do instrumento de pesquisa aplicado aos congressistas participantes da oficina sugerida.

Levando em consideração as ações metodológicas utilizadas em sala de aula, conclui-se que, além da teoria e dos conceitos algébricos, o concreto e a manipulação dos objetos de estudo, influencia o aluno a questionar-se e observar o seu cotidiano. Assim, será possível que ele construa, na prática, um pensamento lógico mais elaborado e uma ligação dos conceitos com o seu dia a dia.

Portanto, pretende-se com esta atividade evidenciar o estudo da geometria, em especial o estudo da esfera, utilizando estratégias para obtenção da área da superfície esférica e o volume da esfera de modo prático e utilitário. Através dessa proposta, objetiva-se melhorar as práticas de sala de aula junto a professores e futuros professores de Matemática, em especial para o Ensino Médio.

Consultas Bibliográficas

BASSO, D.; SANTOS, T.O. **Geometria:** Curso colegial. Porto Alegre: Editora do professor gaúcho. s/d.

BENK, P.; FIGUEIREDO, E. B. **Arquimedes e a esfera.** Disponível em: <https://www.udesc.br/arquivos/udesc/id_cpmenu/6221/18_15035696954909_6221.pdf> Acesso em: 20 maio 2019.

BENK, Polyana, *et al*. **O princípio de Cavalieri:** Numa abordagem apoiada pelas tecnologias atuais, II Colbeduca, Joinville, 2016.

BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. **Curso de Matemática.** São Paulo: Editora Moderna, 1993.

BICUDO, I. **Os Elementos/Euclides.** Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1999.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. 3. ed. Campinas: UNICAMP, 2002.

FÉLIX, V. S. **Educação Matemática:** Teoria e prática da avaliação. Passo Fundo: Clio livros, 2001.

GARBI, G. G. **A Rainha das Ciências:** Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática. 5. ed. São Paulo: Livraria da física, 2010.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI JR., José Ruy. **Matemática fundamental:** Uma nova abordagem, São Paulo: Editora FTD, 2002.

LEZZI, Gelson *et al.* **Matemática.** São Paulo: Editora Atual, 2002.

MARCOS VINICIUS. **Esfera.** Disponível em: <https://querobolsa.com.br/enem/matematica/esfera> Acesso em: 11maio 2019.