

## Números Inteiros: Desafios e possibilidades para uma aprendizagem significativa

*Marlusa Benedetti da Rosa<sup>1</sup>*

### Resumo

Este trabalho tem como objetivo contribuir para a formação continuada de professores de Matemática, a partir de reflexões teóricas e de atividades práticas já utilizadas junto a estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental. A proposta do minicurso é, através da exploração de materiais concretos, discutir situações de aprendizagem capazes de auxiliar na identificação de possíveis dificuldades na compreensão da construção do conjunto dos números inteiros pelos estudantes. Para tanto, o trabalho apresenta uma sequência de atividades que visam fazer com que os professores de Matemática, em especial os que atuam no sétimo ano do Ensino Fundamental, reflitam sobre algumas dificuldades inerentes à aprendizagem do conjunto dos números inteiros. O minicurso organiza-se a partir de situações de aprendizagem pensadas a partir da teoria dos Campos Conceituais de Gerar Vergnaud. Acredita-se que, conversar sobre circunstâncias de sala de aula, pode provocar desequilíbrios cognitivos nos professores e, conseqüentemente, uma mudança nas práticas docentes. Para tanto, primeiramente, será apresentado os resultados de uma pesquisa sistemática sobre o ensino e a aprendizagem do conjunto dos inteiros. Na sequência, os participantes serão convidados a explorar três materiais concretos que visam a compreensão da representação geométrica dos inteiros, a operação de adição e a operação de multiplicação. Para finalizar a atividade está previsto um diálogo entre os participantes sobre como essas atividades podem auxiliar no diagnóstico de possíveis dúvidas dos alunos e formas de intervenção capazes de auxiliar na superação das mesmas.

**Palavras-chave:** Jogos; Conjunto dos Números Inteiros; Campos Conceituais

### Introdução

Um dos grandes desafios para o professor de Matemática que atua no Ensino Fundamental é levar os estudantes a compreenderem a estrutura do conjunto dos números inteiros, bem como operar com seus elementos. Certamente esse tema exige do docente, constante reflexão sobre suas práticas educativas.

O sucesso na aprendizagem dos estudantes está diretamente relacionado às situações de aprendizagem propostas, pois é durante a execução das mesmas que o professor terá oportunidade de acompanhar o desenvolvimento cognitivo do aluno expresso através dos procedimentos e das atitudes adotados na resolução. Faz-se necessário pensar em

---

<sup>1</sup> Licenciada em Matemática-UFRGS, Mestre em Educação em Ciências e Matemática-PUCRS, Doutora em Informática na Educação-UFRGS, Docente do Colégio de Aplicação-UFRGS

situações de aprendizagem capazes promover desequilíbrios cognitivos necessários para o processo de conceituação dos estudantes. As estruturas cognitivas já existentes servirão como base para a ampliação do sistema conceitual, porém existem aspectos que precisam ser superados para que se chegue a compreensão de um novo conceito.

No conjunto dos números inteiros é fundamental que os estudantes compreendam a existência do conceito de direção implícito na utilização dos sinais positivo e negativo. A compreensão do conceito de direção está diretamente relacionada ao conceito de referencial que no conjunto dos números inteiros será representado pelo algarismo zero. (MALAGUTTI; BALDIN, 2010). Neste minicurso serão apresentadas três situações de aprendizagem que auxiliarão na compreensão dessas ideias. Todas envolvem recursos manipulativos os quais servirão como suporte inicial para o processo de abstração envolvido no conceito abordado.

Com essa perspectiva a oficina se desenvolve a partir de uma abordagem teórica sobre a teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud, na sequência será apresentada uma revisão sistemática de estudos correlatos que tratam da aprendizagem dos números inteiros. Com base nesses referenciais teóricos os participantes da oficina serão convidados a participar das situações de aprendizagem propostas confeccionando e manipulando os materiais que serão utilizados junto aos estudantes e, por fim será proposto um momento de diálogo onde todos terão oportunidade de trocar experiências relativas à aprendizagem dos números inteiros vivenciadas no contexto da escolar.

### **A teoria dos Campos Conceituais**

Neste texto apresentamos a Teoria dos Campos conceituais como subsídio teórico para a proposta desse minicurso. Essa teoria foi desenvolvida por Gerard Vergnaud, matemático, discípulo de Jean Piaget e um dos fundadores da Escola Francesa de Didática da Matemática. Tomando como premissa que as dificuldades dos estudantes são diferentes, de um campo conceitual para o outro, o autor desenvolveu estudos buscando compreender o processo de conceituação envolvido na elaboração de conceitos matemáticos. (ROSA, 2005 p. 22)

O interesse de Vergnaud (1996a) era estudar o funcionamento cognitivo do “sujeito-em-ação”. Para ele, no momento em que nos interessamos pelas relações que se estabelecem na sala de aula, obrigatoriamente, precisamos nos interessar pelo conteúdo

do conhecimento. Portanto, o desenvolvimento cognitivo depende de situações e de conceitualizações específicas para lidar com elas. Por isso, o autor “toma como referência o próprio conteúdo do conhecimento e a análise conceitual desse conhecimento” (VERGNAUD, 1994 *apud* MOREIRA 2003, p. 1). Nessa proposta o conteúdo do conhecimento é o conjunto dos números inteiros e a análise conceitual envolvida na elaboração desse conteúdo articula os conceitos prévios, os procedimentos e as atitudes evidenciadas pelos estudantes durante a realização das atividades propostas como aspectos necessários para a ampliação das estruturas cognitivas.

Ao contrário de outras teorias que utilizam os modelos da linguagem e do tratamento da informação para análise dos modelos complexos, a teoria dos campos conceituais utiliza modelos que atribuem aos próprios conceitos matemáticos um papel essencial. Não descarta os enunciados e o número de elementos em jogo, como fatores pertencentes à complexidade, apenas os aponta como subordinados a determinadas estruturas cognitivas. (VERGNAUD, 1996a)

Para Vergnaud, a lógica é insuficiente para explicar a complexidade das tarefas e subtarefas. Segundo ele, a lógica coloca, num mesmo plano, objetos matemáticos que possuem diferentes problemas de conceitualização, embora possuam o mesmo estatuto lógico. Por isso, o autor denomina a teoria dos campos conceituais como uma psicologia dos conceitos, na qual, o termo “estrutura” intervém na própria designação de Campo Conceitual. Considera **a situação** como a primeira entrada de um Campo Conceitual, e aponta como segunda entrada **os conceitos e os teoremas**. [grifos nossos] Nesse sentido, as atividades práticas planejadas pelos professores constituem-se como situações capazes de mobilizar conceitos e teoremas já conhecidos de forma a ampliá-los na constituição da estrutura necessária para a compreensão de novos conceitos.

A teoria dos Campos Conceituais, propõe considerar os próprios conteúdos do conhecimento e a análise conceitual do seu domínio para “compreender as filiações e as rupturas entre conhecimentos, nas crianças e nos adolescentes, entendendo por ‘conhecimentos’, tanto o saber fazer como os saberes expressos.” (VERGNAUD, 1996a p. 155) Segundo essa teoria, compreender o processo de conceitualização é fundamental para que o professor consiga propor um conjunto de situações capazes de levar os alunos a progredirem dentro das suas próprias condições.

Um dos aspectos chaves para a compreensão do significado de campos conceituais, bem como para a importância desse estudo, encontra-se na definição de

Campo Conceitual como “[...] um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e provavelmente entrelaçados no processo de aquisição.” (VERGNAUD, 1982 *apud* SOUSA; FÁVERO, 2003 p. 5)

Para Vergnaud, as situações dão sentido aos conceitos. No entanto, o sentido não está nas situações em si, pois embora o significado atribuído pelo sujeito a um conceito envolva uma gama variada de situações, estas contém diferentes aspectos de um mesmo conceito. Cabe ainda ressaltar que vários conceitos estão envolvidos na análise de uma dada situação. Nesse sentido o estudo de situações ou conceitos isolados não contempla o movimento dialético presente no pensamento do sujeito.

Segundo Sousa e Fávero (2003) e Moreira (2003) três argumentos principais levaram Vergnaud ao conceito de Campo Conceitual e são eles:

- 1) um conceito não se forma dentro de um só tipo de situação;
- 2) uma situação não se analisa como um só conceito;
- 3) a construção e a apropriação de todas as propriedades de um conceito, ou de todos os aspectos de uma situação, é um processo de muito fôlego que se desenrola ao longo dos anos, às vezes uma dezena de anos, com analogias e mal-entendidos entre situações, entre concepções, entre procedimentos, entre significantes.

O conceito de situação conforme é utilizado na teoria dos Campos Conceituais atende ao sentido que lhe dão os psicólogos. “Os processos cognitivos e as respostas do sujeito são função das situações com as quais eles se confrontam.” (VERGNAUD, 1996a p. 170 -171). Duas ideias principais estão presentes nas situações:

- 1) a ideia de variedade: existe uma grande variedade de situações num dado campo conceitual, e as variáveis de situação são um meio de gerar, de forma sistemática, o conjunto das classes possíveis;
- 2) a ideia de história: os conhecimentos dos alunos são formados pelas situações com que eles se depararam e progressivamente dominaram, nomeadamente pelas situações susceptíveis de dar sentido aos conceitos e aos procedimentos que se pretende ensinar-lhes.

Podemos pensar que a combinação dessas duas ideias torna complexo o processo de ensino e de aprendizagem, pois a primeira orienta para a decomposição em elementos simples, enquanto a segunda orienta para a procura de relações funcionais. Sendo as relações funcionais “compostas por várias relações, e cuja importância relativa está, em

grande medida, ligada à frequência com que se encontram.” (VERGNAUD, 1996a p. 171).

Cabe ainda salientar que o termo situação é entendido como uma combinação de tarefas nas quais é necessário conhecer tanto a natureza quanto as dificuldades próprias. Nesse sentido, toda situação é complexa, tendo em vista que “a dificuldade de uma tarefa não é, nem a soma, nem o produto, das dificuldades das diferentes tarefas, mas é claro que o fracasso numa subtarefa implica o fracasso global.” (VERGNAUD, 1996a p. 167). Segundo Vergnaud (op. cit. p. 156), é possível distinguir diferentes classes de situações:

- classes de situações para as quais o sujeito dispõe, no seu repertório, num dado momento do seu desenvolvimento, e em determinadas circunstâncias, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;
- classes de situações para as quais o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e de exploração, a hesitações, a tentativas abordadas, conduzindo-o, quer ao êxito, quer ao fracasso.

A formação de conceitos matemáticos vista sob uma abordagem psicológica e didática leva-nos a considerar o conceito como um conjunto de invariantes utilizáveis na ação. Essa definição pragmática de conceito estabelece-se a partir do conjunto de situações que constituem as referências das suas propriedades, bem como ao conjunto de esquemas utilizados pelos sujeitos nessas situações.

Para Vergnaud a conceituação exige a utilização de significados explícitos. Por isso, o autor considera que num conceito devem estar presentes três conjuntos:  $C=(S,I,s)$ , onde:

- S: conjunto de situações que dão sentido ao conceito (a referência);
- I: conjunto das invariantes nas quais assenta a operacionalidade dos esquemas (o significado);
- s: conjunto das formas pertencentes e não pertencentes à linguagem que permitem representar simbolicamente o conceito, as suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (significante). (VERGNAUD, 1996a p. 166)

Nesse sentido, para poder estudar o desenvolvimento e o funcionamento de um conceito, durante o processo de conceituação, as situações de aprendizagem devem considerar os planos da referência, o significado e o significante, ao mesmo tempo. O autor alerta ainda que: “não se pode, pois, reduzir o significado, nem aos significantes,



nem às situações.” (VERGNAUD, 1996a p. 166). Assim, não existe bijeção entre os três termos definidos anteriormente.

Vergnaud acredita que quando nos interessamos pela aprendizagem de um conceito, não podemos reduzi-lo à sua definição, pois é “através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança.” (VERGNAUD, 1996a p. 156).

### **Os números inteiros: aportes teóricos**

Considerando a Teoria dos Campos Conceituais, partiu-se em busca de estudos relativos ao Conjunto dos Números Inteiros, com a perspectiva de visualizar quais conceitos são estruturantes desse conhecimento e de elaborar situações de aprendizagem capazes de levar os alunos a ampliarem seu sistema cognitivo.

No estudo de Almeida (2015) encontrou-se uma revisão bibliográfica da forma de apresentação dos números inteiros feitas em livros de matemática. O autor indica que somente em um livro encontrou a construção dos números inteiros a partir do eixo referencial, porém mesmo nesse livro, a apresentação do conjunto dos números inteiros utiliza a operação de subtração como base. Outra abordagem desconsiderada pelos autores de livros didáticos, segundo o autor, é a nomenclatura *oposto*, a qual se constitui como função primordial para a construção das operações no conjunto dos números inteiros. Na maioria dos livros, o oposto emerge da adição, enquanto que o adequado seria via simetria em relação ao ponto referencial.

Outro aspecto observado nos livros didáticos diz respeito a descrição do conjunto dos números inteiros, é apresentado por extensão o que se constitui em um equívoco já que esse conjunto é infinito. O autor salienta que seria importante explorar o fato de que, diferente do que ocorre em outros conjuntos, no conjunto dos números inteiros todos os elementos possuem um antecessor e um sucessor. (ALMEIDA, 2015 p. 22).

Malagutti e Baldin (2010, p. 8-11) indicam algumas dificuldades na aprendizagem dos números inteiros. Selecionou-se algumas dessas dificuldades apresentadas pelos autores em uma tabela, colocando na primeira coluna as possíveis dúvidas que o estudante pode ter, relacionando-as com as possibilidades de intervenção do professor, ou seja, quando o professor tem a compreensão da origem das dificuldades pode auxiliar os estudantes fazendo questionamentos e intervenções variadas que auxiliem na

compreensão do estudante. Acredita-se que os dados selecionados auxiliarão na organização das estratégias pedagógicas e das situações de aprendizagens elaboradas pelos professores.

**Quadro 1** – Dúvidas dos estudantes versus possibilidades de intervenção do professor

Dúvidas dos estudantes	Possibilidades de intervenção do professor
Se $3 > 2$ , porque $-3 < -2$ ?	Qual é o significado do sinal “-” que inverte a ordem natural dos números? Os números inteiros, além de medir quantidades, diferenciam algum tipo de “qualidade” (ser positivo ou negativo). Porque esta qualidade interfere na ordem?
Porque $-(-5) = +5$ ?	Como dar significado a esta involução provocada pelo sinal “-”.
Qual a diferença entre o sinal “-” na frente de um número natural e o sinal de operação de subtração? Porque se usa o mesmo sinal? Porque o mesmo sinal é usado ainda para se indicar o oposto de um número inteiro?	Alguns textos fazem distinção entre o sinal de oposto de um número e o sinal da operação de subtração. Esta diferença é sutil, mas vale a pena ser destacada. Nestes textos, a qualidade de um número inteiro (ser positivo ou negativo) é indicada pelos sinais “+” e “-” do lado esquerdo do número, um pouco acima do usual, como nos exemplos: $+7$ e $-3$ Estes sinais fazem parte integrante do número inteiro e não devem ser confundidos com os sinais usuais das operações.
As operações nos números naturais têm significado claro e condizente com experimentos do mundo real.	Como dar significado, por exemplo, a multiplicações do tipo $(-3) \cdot (+7)$ e $(-3) \cdot (-7)$ ? Somar números naturais está associado ao ato de juntar, de reunir. Multiplicar números naturais descreve várias ações concretas: • soma repetida de parcelas iguais, • números de arranjos retangulares, • número de decisões tomadas em sequência.

**Fonte:** Elaboração própria a partir de Malagutti e Baldin (2010, p. 8-11)

Segundo Almeida (2015, p. 22), a que se pensar a estruturação do conjunto dos números inteiros levando-se em consideração as três formas de representação do sinal negativo “-”, quais sejam:

- como notação: utilizada no registro dos números que encontram-se à esquerda do referencial, no caso de eixos horizontais; ou abaixo do referencial, no caso dos eixos verticais;
- como oposto:  $-m$  denotando o oposto do número  $m$ , sendo que  $m$  pode ser tanto positivo como negativo;
- como operação:  $a - b$ , nesse caso representa a subtração entre os números  $a$  e  $b$ , que da mesma forma podem ser tanto positivos quanto negativos.

É fundamental considerar que: “com a introdução dos números negativos, os números ganham um novo atributo: **a orientação**. Assim, passam a representar uma quantidade orientada, isto é, uma quantidade acompanhada de um referencial.” (ALMEIDA, 2015 p. 39). Decorre dessa afirmação uma série de aspectos que precisam ser considerados na introdução ao conjunto dos números inteiros: o número zero se constitui como o referencial; que a direita desse referencial estão todos os números positivos e que a esquerda encontram-se todos os números negativos. Ou de forma

análoga, no eixo vertical, o zero também se constitui como o referencial, e todos os que estão acima dele são positivos ao passo que os que estão abaixo são negativos.

Vejam bem, para nós professores isso parece óbvio, e de fato é, por que já constituímos o conceito de números inteiros. Entretanto, para o estudante que está ampliando seus conhecimentos em relação ao campo numérico, o óbvio precisa ser explorado, precisa tornar-se conhecido, ou seja, o estudante precisa explorar os aspectos conceituais que o auxiliarão na ampliação do sistema conceitual já existente.

Para abordar essa questão em relação ao referencial Maragutti e Baldin (2010) e Almeida (2015) sugerem a utilização de situações-problema “Se um mergulhador A está a 20 metros de profundidade e um mergulhador B está a 15 metros de profundidade, qual deles está a maior profundidade?” (ALMEIDA, 2015, p. 40) No caso o autor, usou esse problema para investigar o conhecimento que alunos do Ensino Médio possuíam a respeito do tema. Sob a perspectiva do Ensino Fundamental, ou seja entre estudantes que estão se apropriando do conjunto dos números inteiros, propusemos a mesma questão como forma de provocar um desequilíbrio cognitivo, ou seja, levar os alunos a pensarem em possibilidades de representação para o problema e, a partir das respostas dos estudantes, intervir no sentido de explorar os diferentes significados do sinal negativo “ - ” relacionando-o com o problema proposto. Tomar o nível o mar como o referencial e atribuir o zero a esse ponto de referência. Discutir como se poderia representar a distância de cada um dos mergulhadores em relação ao nível do mar, aproveitando para atribuir o sinal “ - ” como o que está abaixo do nível do mar e, em contrapartida o sinal “ + ” como quem está acima do nível do mar. E a partir do segundo questionamento “a que distância se encontra um mergulhador A do mergulhador B”, vislumbrar o sinal “ - ” como a diferença entre dois pontos, logo como possibilidade de subtração.

Malagutti e Baldin(2010, p. 15) incluem na sua proposta metodológica a resolução de problemas, a manipulação de materiais concretos e a utilização de jogos como situações de aprendizagem capazes de auxiliar na compreensão das principais ideias que envolvem a compreensão das operações com números inteiros. Colabora com esses autores a visão de Pommer(2010) quando afirma

A introdução de situações contextualizadas, jogos e materiais manipuláveis, associadas ao uso da linguagem matemática, expressas em diversas possibilidades, viabilizam um trabalho didático que permite superar os obstáculos epistemológicos, ao esclarecer as escolhas realizadas ao longo do percurso de construção do conhecimento matemático envolvendo os Números Inteiros. (POMMER, 2010 p.4)



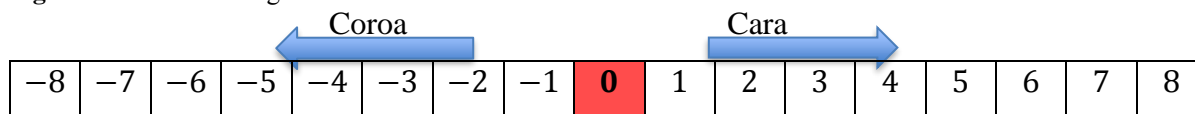
## Situações de aprendizagem utilizando recursos concretos

Nesta seção serão apresentados alguns materiais manipuláveis que tem como objetivo explorar a representação geométrica dos números inteiros através de retas horizontais ou verticais que utilizam o número zero como referencial. O primeiro se constitui em uma régua a qual será utilizada para explorar o conceito de antecessor e sucessor, de números opostos e módulo. Na sequência são apresentados dois jogos, o primeiro tem o objetivo de explorar as operações de adição e de subtração. Já o segundo visa a exploração da operação de multiplicação com números inteiros.

### Jogo “Cara” ou “Coroa”

O jogo Cara ao Coroa foi apresentado por Malagutti e Baldin(2010, p.40). Ele consiste apenas de um tabuleiro ( Figura 1) que representa um reta orientada com algarismos de  $-8$  a  $+8$ , dois peões e uma moeda.

**Figura 1** – Tabuleiro Jogo “Cara ou Coroa”



**Fonte:** Adaptado de Malagutti e Bandin(2010, p. 40)

O jogo consiste em avançar uma casa ou voltar uma casa, conforme a face da moeda sorteada. Se ao jogar a moeda essa cair com a “cara” voltada para cima seu peão andará uma casa para a direita. Se o estudante tirar “coroa” andará uma casa para a esquerda. Inicia-se o jogo colocando o peão de cada jogador sobre a casa do “zero”. O primeiro jogador joga a moeda e desloca seu peão conforme o resultado. Na sequência o segundo jogador faz o mesmo. E assim sucessivamente. Ganha o jogo o peão que estiver mais distante do Zero na quinta jogada.

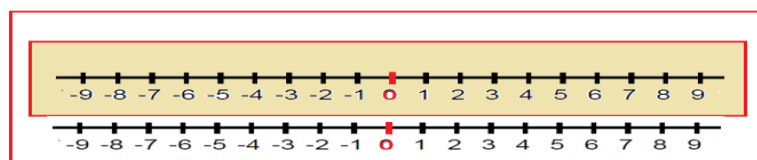
Após a repetição de pelo menos duas jogadas sugere-se que o professor explore algumas situações de jogo que poderiam ocorrer. Por exemplo: Márcia e Carla estavam disputando uma partida do Jogo “Cara” ou “Coroa”. Durante a disputa Marta tirou: Cara, Cara, Coroa, Cara e Coroa. Enquanto Carla tirou: Cara, Coroa, Coroa, Coroa e Cara. Quem ganhou o jogo? Justifique sua resposta. Pensar em situações do jogo sem a presença do tabuleiro auxiliará o estudante no processo de abstração e na sistematização da aprendizagem.

### Régua dos números inteiros

O recurso aqui apresentado foi inspirado em uma reportagem da revista Nova Escola (2000). A proposta apresentada nesta reportagem se constitui na construção de uma régua feita de cartolina, formada por duas retas numéricas que vão do  $-9$  ao  $+9$ . A reta interna se move tanto para a direita quanto para a esquerda, tal movimento permite a visualização dos números opostos, bem como resolver somas e subtrações. Destaca-se a importância de o próprio estudante construir o material. A confecção do mesmo facilitará a compreensão de que o espaço entre um número e o seu sucessor tem sempre a mesma unidade de medida, além disso será possível explorar o número negativo um ( $-1$ ) como antecessor do zero e que todos os números do conjunto dos números reais possui seu antecessor e seu sucessor, segundo Almeida e Ripoll(2015) compreender o ordenamento do conjunto auxilia na compreensão das operações de adição e de subtração. Com base na reportagem foi organizado o modelo disponível no **Anexo 1**. Esse modelo foi testado em turmas do sétimo ano de uma escola pública federal de Porto Alegre. O espaçamento entre os números e sua indicação nas retas não foram colocados propositalmente, pois se acredita que enquanto os estudantes estiverem realizando essa marcação também ocorre aprendizagem.

Cada estudante produzirá sua própria régua que poderá ser explorada durante o tempo que o professor considerar conveniente. A **Figura 2** representa uma régua já pronta. A parte interna é móvel e pode ser deslocada da direita para a esquerda.

**Figura 2-Representação da reta numérica**



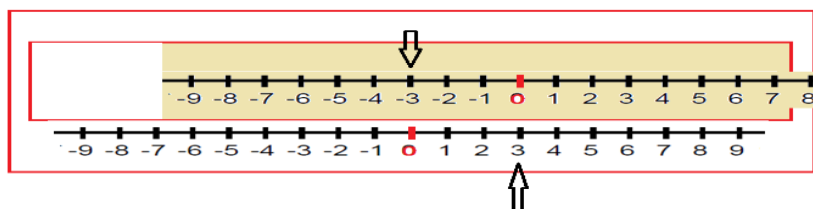
**Fonte:Elaboração própria**

Nos itens a seguir apresentam-se sugestões para exploração do régua. Essas atividades já foram aplicadas em turmas regulares e indicaram um bom resultado na aprendizagem dos estudantes

- a) **Números opostos:** para explorarmos os números opostos basta deslocar a parte interna da régua, colocando o número desejado sobre o referencial da parte fixa. Por exemplo: para encontrarmos o oposto do número inteiro negativo ( $-3$ ), solicita-se ao estudante que desloque a parte móvel da régua para a direita de forma que o número ( $-3$ ) fique exatamente sobre o referencial da reta fixa. Na sequênica pergunta-se: Qual número está exatamente abaixo do referencial da reta

que foi movimentada? O número positivo três (+3), conforme pode ser observado na **Figura 3**. Sugere-se ao professor pergunte aos estudantes de quantas unidades cada um dos números dista do referencial observado? É importante que os estudantes explorem diversos valores.

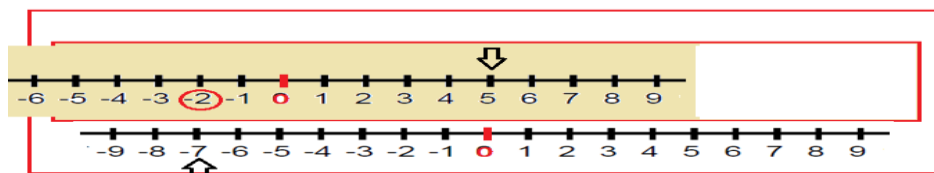
**Figura 3 – Exemplo de exploração para números opostos**



Fonte: Elaboração própria

- b) **Realizando operações de adição:** para efetuarmos a operação  $(+5) + (-7)$ , por exemplo, inicialmente deslocamos a parte interna da régua para a esquerda colocando o número positivo (+5) sobre o referencial da parte fixa conforme mostra a seta. Na sequência solicita-se ao estudante que localize na reta fixa o número negativo sete (-7). O resultado da operação estará na reta que foi deslocada exatamente sobre o segundo número (-7), no caso o (-2), conforme está circulado na **Figura 4**.

**Figura 4: Exemplo de exploração de adição**



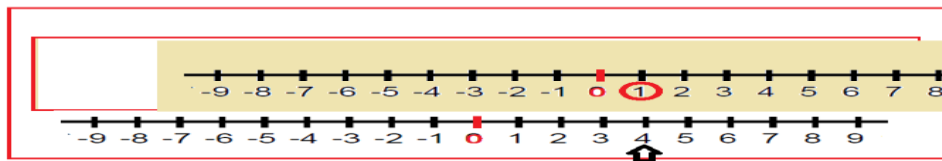
Fonte: Elaboração própria

Num primeiro momento o professor pode apenas explorar as adições movimentando a régua, porém logo após os estudantes dominarem a estratégia, é importante que se observe que o resultado, nada mais é que a diferença entre os módulos seguido do sinal do maior algarismo. Esse fato também fica visível quando se observa os referenciais. O (+5) dista cinco casas para a direita do seu referencial, já o (-7) dista sete casas para a esquerda do seu referencial. Logo o resultado abarcará o sinal negativo, já que esse representa a esquerda.

- c) **Subtração:** será explorada como uma adição cujo o subtraendo é substituído pelo seu oposto. Por exemplo:  $(-3) - (-4)$ . Primeiramente o professor perguntará quem é o oposto do número que está depois do sinal de subtração. No caso, quem

é o oposto do número  $(-4)$ ? Teremos o positivo quatro  $(+4)$ . Assim nossa adição se transformará em uma adição entre  $(-3) + (+4)$ . Para resolvê-la iremos deslocar a reta móvel para a direita colocando o número  $(-3)$  sobre o referencial da reta fixa. Depois partiremos em busca do número positivo quatro na reta fixa e registraremos o número que está exatamente sobre ele, no caso o  $(+1)$ , conforme pode ser visualizado na **Figura 5**.

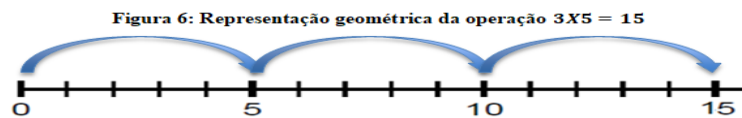
**Figura 5** – Exemplo de exploração de subtração



Fonte: Elaboração própria

### Jogo “ Bota de Muitas Léguas”

O jogo Bota de Muitas Léguas é um jogo adaptado de outra atividade muito utilizada, nos anos iniciais do ensino fundamental, para ensinar um dos aspectos da operação de multiplicação no conjunto dos números naturais: a adição de parcelas iguais. Nesta situação o primeiro número representa a quantidade de vezes que segundo número será repetido. Por exemplo:  $(3)X(5) = 5 + 5 + 5$  ou seja “Três vezes o cinco corresponde a adição de três parcelas de valor cinco”. A representação geométrica desse fato pode ser realizada conforme o apresentado na **Figura 6**:

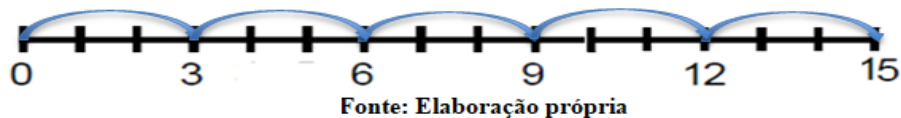


Fonte: Elaboração Própria

Ripoll, Rangel e Giraldo(2015 p. 96) alertam que a operação de multiplicação como soma de parcelas iguais pode ser representada no conjunto do números naturais e que essa representação pode se tornar um obstáculo na operação de multiplicação em outros conjuntos numéricos, como nos exemplos a seguir:  $(-2)X(-3)$  ou  $\left(\frac{2}{3}\right)X\left(\frac{5}{8}\right)$ .

Outro situação destacada por Ripoll, Rangel e Giraldo(2015 p. 97), é que essa representação pode levar a dificuldades na compreensão por parte dos estudantes diz respeito a comutatividade da multiplicação. No caso, embora  $3 \times 5 = 5 \times 3$  as representações geométricas certamente diferem conforme pode ser observado na **Figura 7**.

**Figura 7: Representação geométrica da operação  $5 \times 3 = 15$**



Destaca-se que embora a representação seja diferente o professor pode salientar que o ponto de chegada é o mesmo. Acredita-se que tanto o professor dos anos iniciais quanto o professor dos anos finais do ensino fundamental precisa oportunizar diferentes formas de representação da operação de multiplicação: o arranjo retangular, o cálculo de possibilidades, a comparação e, também, a adição de parcelas iguais. De acordo com Vergnaud(1996a) a utilização de situações diferentes é um fator necessário para a constituição dos conceitos. Assim cabe ao professor ter presente a importância de explorar sob diferentes perspectivas as operações destacando os aspectos que diferenciam cada um dos conjuntos, pois só assim se poderá evitar e superar obstáculos de aprendizagem.

A seguir apresenta-se o “Jogo Bota de Muitas Léguas” o qual foi aplicado em turmas de sétimo ano e que produziu resultados significativos no sentido de auxiliar a compreensão da diferenciação entre a adição e a multiplicação de números inteiros de mesmo sinal sejam eles ambos positivos ou ambos negativos. O jogo cara ou coroa, assim como, a régua auxiliam muito na compreensão do zero como referencial na reta numérica.

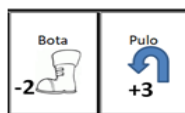
Em Fraga, Matos e Maffi (2015 p.6) encontra-se uma proposta de jogo semelhante ao que será apresentado aqui denominada de “Pulo do Coelho”. Esse jogo consiste na inclusão do termo “pulo” e “tamanho do pulo” fato que o aproxima da proposta do “Bota de muitas léguas”, porém o pulo do coelho não trás as cartas para a escolha do jogador.

O jogo Bota de Muitas Léguas é um jogo para ser jogado de duas a quatro pessoas que também pode ser jogado uma dupla contra outra. Ele é composto de um tabuleiro (Anexo 2) que possui um ponto de “partida” no meio do tabuleiro e dois pontos de “chegada” um a direita e outro a esquerda. Quatro peões tem formato de botas de cores diferentes (pode-se utilizar outros peões desde que nos mesmos possa se identificar a frente e as costas) e cinquenta cartas (Anexo 3). Cada carta é dividida em duas partes



“bota” e o “pulo”. A “bota” indica quantos passos deve-se dar e em qual direção (+) “vire para a direita” e (-) “vire para a esquerda”. Já o “Pulo” indica o tamanho do passo e se será dado (+) “andar de frente” ou (-) “andar de costas”. A carta da **Figura 8**, por exemplo, indica que a bota deve ser virada para a esquerda e dar dois passos de tamanho três para frente.

**Figura 8:** Carta do jogo Bota de Muitas Léguas



Fonte: Elaboração própria

O objetivo do jogo de cada jogador é mover seu peão (bota) a um dos pontos de chegada antes dos outros jogadores. Inicia-se o jogo com todos os peões colocado na linha de “partida”. Executa-se um sorteio para decidir quem iniciará o jogo e segue-se a jogada com o jogador que estiver a esquerda do iniciante. Cada jogador receberá três cartas que ficarão a escura para os outros jogadores. Na mesa ficarão disponíveis quatro cartas (viradas para cima). Na sua vez de jogar o jogador poderá trocar uma carta que tem na sua mão por uma carta disponível na mesa, mas essa deverá ser utilizada naquele momento. A cada jogada o jogador compra uma carta e coloca na mesa a carta que escolheu para executar seu movimento. Os adversários deverão conferir o movimento, caso ele tenha sido executado de maneira equivocada, o jogador passa sua vez para o próximo jogador. Cada carta poderá ser utilizada uma única vez. Vence o jogo quem atravessar primeiro a linha de chegada.

### Considerações finais

Este minicurso se propôs a apresentar três atividades práticas já testadas em turmas de sétimo ano do ensino fundamental como forma de desencadear um diálogo entre professores e futuros professores sobre a aprendizagem dos números inteiros no contexto escolar. Para tanto, apresentou-se a Teoria dos Campos Conceituais de Gerard Vergnaud e uma pesquisa de estudos correlatos que auxiliaram na seleção das atividades desenvolvidas na oficina.

Acredita-se que a mediação do professor, assim como as situações de aprendizagem compartilhadas pelos estudantes se constituem como fatores facilitadores do processo de conceituação de cada participante. Assim, na medida em que os professores oferecem situações de aprendizagem que poderão oportunizar aos seus alunos

reflexões sobre os conceitos e conteúdos matemáticos envolvidos, terão oportunidade de compreender os possíveis obstáculos com os quais os estudantes se deparam no contexto escolar.

## Referências

ALMEIDA, Theodoro Becker de. Uma revisitação aos conjuntos numéricos no ensino médio. **Dissertação:** Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul-UFRGS, Porto Alegre, 2015.

ALMEIDA, Theodoro Becker de; RIPOLL, Cydara Cavedon. UMA REVISITAÇÃO AOS CONJUNTOS NUMÉRICOS NO ENSINO MÉDIO. **II Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática.** [https://anpmat.org.br/simposio-nacional-2/wp-content/uploads/sites/3/2016/01/becker\\_ripoll.pdf](https://anpmat.org.br/simposio-nacional-2/wp-content/uploads/sites/3/2016/01/becker_ripoll.pdf), Brasília, 2015.

FRAGA, Francieli Bandeira de ; MATOS, Diego de Vargas; MAFFI, Caroline. Construção e aplicação de materiais manipulativos para o ensino de números inteiros In: **XII Encontro Gaúcho de Educação Matemática**, Porto Alegre, 2015. Disponível em: <http://ebooks.pucrs.br/edipucrs/anais/anais-do-egem/assets/2015/3095864027.pdf>> Acesso em: 20/06/2018.

MALAGUTTI, Pedro Luiz; BALDIN Yuriko. **Mini-Curso para Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Básico**, UFSCAR, 2010. Disponível em: <https://www.dm.ufscar.br/profs/dplm/osnumerosinteiros.pdf> Acesso em: 26/06/2018.

MOREIRA, Marco Antonio. **A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área.** [http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol7/n1/v7\\_n1\\_a1.html](http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol7/n1/v7_n1_a1.html) Acesso em:11/12/2003

POMMER, Wagner M. (2010) Diversas abordagens das regras de sinais nas operações elementares em Z. **Seminários de Ensino de Matemática/ SEMA–FEUSP** <http://www.nilsonjosemachado.net/sema20100316.pdf> Acesso em:17/06/2019

ROSA. A construção do conceito de função em atividades integradas entre a Matemática e a Física. **Dissertação:** Programa Pós-Graduação em Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2005.

RAMALHO, Priscila. Sem medo de números negativos. **Nova Escola. Edição 133, 01 de Junho, 2000.** Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/2717/sem-medodos-numeros-negativos> Acesso em: 05/06/2018.

RIPOLL, Cydara; RANGEL, Letícia, GIRALDO, Victor. Livro do Professor de Matemática Volume I: números naturais. Rio de Janeiro, SBM, 2015.

SOUSA, Célia Maria Soares Gomes de e FÁVERO, Maria Helena. Análise de uma situação de resolução de problemas de física, em situação de interlocução entre um

II Conferência Nacional de Educação Matemática

VII Jornada Pedagógica de Matemática do Vale do Paranhana (JOPEMAT)

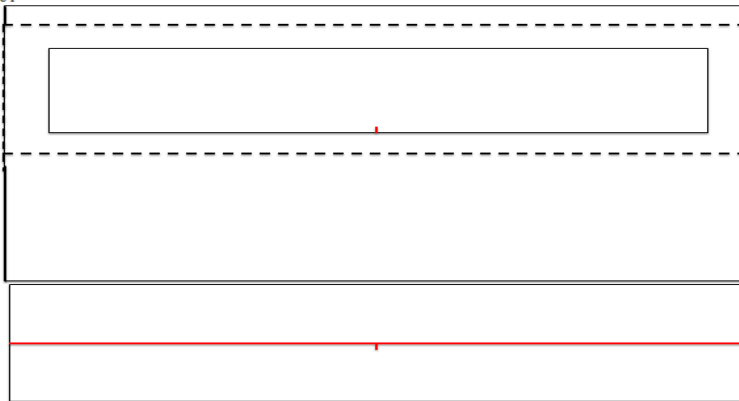
I Encontro Nacional Pibid / Residência Pedagógica / Matemática - FACCAT

XXV Encontro Regional de Estudantes de Matemática do Sul (EREMATSUL)

especialista e um novato, à luz da teoria dos campos conceituais de Vergnaud. In. [http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol7/n1/v7\\_n1\\_a3.htm](http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol7/n1/v7_n1_a3.htm) Acesso em 12/12/2003

VERGNAUD, Gerard. A teoria dos campos conceituais. In BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas**. Portugal: Lisboa. Instituto Jean Piaget, p. 155-191, 1996a.

Anexo 1



Anexo 2

CHEGADA
PARTIDA
CHEGADA

ANEXO 3

Bota +2	Pulo +1	Bota +2	Pulo +2	Bota +2	Pulo +3	Bota +2	Pulo +4	Bota +2	Pulo +5
Bota +3	Pulo +1	Bota +3	Pulo +2	Bota +3	Pulo +3	Bota +3	Pulo +4	Bota +3	Pulo +5
Bota +1	Pulo -1	Bota +1	Pulo -2	Bota +1	Pulo -3	Bota +1	Pulo -4	Bota +1	Pulo -5
Bota +2	Pulo -1	Bota +2	Pulo -2	Bota +2	Pulo -3	Bota +2	Pulo -4	Bota +2	Pulo -5
Bota -1	Pulo +1	Bota -1	Pulo +2	Bota -1	Pulo +3	Bota -1	Pulo +4	Bota -1	Pulo +5

Bota -1	Pulo -1	Bota -1	Pulo -2	Bota -1	Pulo -3	Bota -1	Pulo -4	Bota -1	Pulo -5
Bota -2	Pulo -1	Bota -2	Pulo -2	Bota -2	Pulo -3	Bota -2	Pulo -4	Bota -2	Pulo -5
Bota -3	Pulo -1	Bota -3	Pulo -2	Bota -3	Pulo -3	Bota -3	Pulo -4	Bota -3	Pulo -5
Bota +1	Pulo +1	Bota +1	Pulo +2	Bota +1	Pulo +3	Bota +1	Pulo +4	Bota +1	Pulo +5

Bota -2	Pulo +1	Bota -2	Pulo +2	Bota -2	Pulo +3	Bota -2	Pulo +4	Bota -2	Pulo +5
Bota -3	Pulo +1	Bota -3	Pulo +2	Bota -3	Pulo +3	Bota -3	Pulo +4	Bota -3	Pulo +5