II Conferência Nacional de Educação Matemática
VII Jornada Pedagógica de Matemática do Vale do Paranhana (JOPEMAT)
I Encontro Nacional Pibid / Residência Pedagógica / Matemática - FACCAT
XXV Encontro Regional de Estudantes de Matemática do Sul (EREMATSUL)

Pensamento Matemático Avançado e visualização em Realidade Aumentada

Thaise Thurow Schaun[1]

Rozane da Silveira Alves[2]

Resumo.

O presente trabalho é parte de uma pesquisa de mestrado em andamento. O projeto de dissertação propõe a utilização de Realidade Aumentada (RA) para estimular a visualização de objetos representados de forma tridimensional como as Superfícies Quádricas e Sólidos de Revolução. Estes conteúdos são trabalhados em disciplinas de Matemática de diversos cursos de graduação da Universidade Federal de Pelotas (UFPel), entre eles 12 cursos de Engenharia, além de dez outros de bacharelado ou licenciatura. Nesses conteúdos, os alunos apresentam dificuldades para resolução de cálculos de áreas e volumes por não visualizarem as superfícies e sólidos no ambiente 3D. O índice de reprovação e abandono nas disciplinas que trabalham com este conteúdo é elevado, e esta pesquisa busca uma alternativa para os estudantes após sucessivos insucessos, uma vez que é imprescindível exercitar a habilidade de abstração por meio da visualização em 3D. Para embasar esta pesquisa buscou-se autores que estudassem esta problemática e encontrou-se nas teorias do Pensamento Matemático Avançado, organizadas pelo teórico britânico David Tall, a importância da visualização para compreensão de conceitos matemáticos, quando representados em três dimensões. Em especial, quando a visualização é aportada em recursos tecnológicos, mais precisamente, dispositivos móveis, tais como *smartphones* e *tablets.* As tentativas do uso de aplicativos de Realidade Aumentada com *smartphones* em sala de aula esbarram ainda com as características de tais aplicativos, pois usualmente são direcionados a somente uma das plataformas *IOS* ou *Android*, o que dificulta a sua utilização em sala de aula.

Palavras-chave: Pensamento Matemático Avançado. Visualização. Realidade Aumentada.

Introdução

Usufruindo das Tecnologias Digitais, podemos, atualmente, ampliar a compreensão de visualização das representações matemáticas. As representações algébricas e geométricas têm um poderoso aliado nos recursos computacionais, que têm, além de seu poder de processamento, representações gráficas de fácil compreensão.

Considerando a evolução dos recursos computacionais, temos desde os primeiros programas de plotagem gráfica, passando pelos programas de geometria dinâmica,

[1] Mestranda em Educação Matemática pela UFPel. Especialista em Ciências e Tecnologias na Educação pelo IFSUL-CAVG. E-mail: thaiseschaun@gmail.com

[2]Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática pela UFPel. Doutora em Educação pela UFPel. E-mail: rsalvex@gmail.com

chegamos à Realidade Aumentada, podendo ainda, ir além até a Realidade Virtual. Todos possibilitando a melhoria da visualização em matemática.

Nesse sentido é possível definir Realidade Aumentada (RA) como a mescla entre objetos virtuais e o mundo real. Na qual são projetados objetos virtuais em uma tela com interação com o real. E neste trabalho será considerada a RA como importante modo de auxílio à compreensão de superfícies em três dimensões, que geralmente são representadas de forma planificada em livros ou quadro, mesmo com os já citados avanços tecnológicos para a representação gráfica.

Nessa perspectiva é destacada a visualização através da utilização de Tecnologias Digitais em sala de aula, e para ressaltar essa importância é empregada a teoria do Pensamento Matemático Avançado.

Assim, apresenta-se como objetivo do presente trabalho propor a utilização da Realidade Aumentada nas representações gráficas em três dimensões, sendo esta utilização justificada pela teoria do Pensamento Matemático Avançado.

Na pesquisa de mestrado mencionada, serão trabalhados, especificamente, os conteúdos de Superfícies Quádricas e Sólidos de Revolução, que trazem a dificuldade da visualização em três dimensões à diversas disciplinas do Ensino Superior ligadas à Matemática, disciplinas estas, presentes em muitos cursos de Ciências Exatas, com altos índices de reprovação.

A partir do exposto, é importante a aplicação da Realidade Aumentada como relevante fonte de imaginário, especialmente, se tratando de situações que envolvam representações em três dimensões, como ilustrado na imagem a seguir.

Figura 1 – Exemplo de utilização de Realidade Aumentada

Fonte: A autora principal

Apesar de ser uma tecnologia com muitas potencialidades, o uso da Realidade Aumentada em sala de aula, encontra percalços, como incompatibilidade de sistemas operacionais, por exemplo, existem aplicativos que funcionam somente na plataforma *IOS* e, também, aplicativos que funcionam somente na plataforma *Android*. O que dificulta sua popularização em sala de aula, fazendo com que seja necessária a utilização de aplicações multiplataforma.

Pensamento Matemático Avançado

É relevante destacar a importância da visualização para as representações em três dimensões, sem uma compreensão visual, a compreensão dos conceitos pode ser prejudicada em alguns casos.

David Tall (1991a) em Pensamento Matemático Avançado detalha a importância da visualização para o entendimento de conceitos matemáticos, ele coloca que a visualização, particularmente através do computador, é um exemplo de aproximação cognitiva mais apropriada, para dar ao estudante uma visão geral dos conceitos e permitir métodos mais versáteis de processar a informação.

Em trabalho anterior, Tall e Vinner (1981) definem **imagem conceitual** e **definição conceitual** trazendo uma diferenciação entre esses termos de grande importância para compreensão de processos cognitivos e para a valorização de diferentes representações para o entendimento de determinados conceitos.

Para os autores, a **Imagem conceitual**

> [...] é a estrutura cognitiva total que está associada ao conceito, a qual inclui todas as figuras mentais, processos e propriedades associadas. Ela é construída ao longo dos anos através de todo tipo de experiência, mudando assim que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece.[3] (TALL e VINNER, 1981, p.152)

Enquanto que a **Definição conceitual**

> [...] é uma forma como as palavras são usadas para especificar aquele conceito. Ela pode ser aprendida por um processo mecânico ou aprendida mais significativamente e estar relacionada em um maior ou menor grau ao conceito por inteiro. Também pode ser uma reconstrução pessoal do estudante. (TALL e VINNER, 1981, p.152)

[3] As citações trazidas nesta seção foram traduzidas da língua inglesa pela autora principal.

Partindo desses conceitos, é importante afirmar que o presente trabalho se preocupa em fomentar a construção da **imagem conceitual** relativa às representações geométricas em três dimensões. Relacionando a representação imagética projetada nas telas dos *smartphones* aos conceitos aprendidos em aula.

Esse tipo de representação, mostra os gráficos de forma dinâmica, diferente da trabalhada usualmente, através de representações planificadas estáticas. Essas representações planificadas, muitas vezes contribuem para uma **imagem conceitual** equivocada, já que as superfícies não existem em duas, mas sim, três dimensões.

David Tall (1991b) em artigo sobre o papel da visualização no Cálculo, além de discorrer sobre pontos fortes e pontos fracos da visualização coloca que:

> O artigo mostra que ideias visuais frequentemente consideradas intuitivas por um matemático experiente não são, necessariamente, intuitivas para um estudante inexperiente, ainda assim, aparentemente, ideias mais complicadas podem conduzir a poderosas intuições para o rigor de provas matemáticas posteriores. (TALL, 1991b, p. 105)

Essa colocação demonstra que, muitas vezes, a visualização não é óbvia, e que, é necessária a preocupação docente frente à dificuldade do estudante em visualizar corretamente a representação gráfica do que está sendo trabalhado.

Para Tall (1991a) o termo abstração é utilizado em Matemática para denotar um processo no qual os conceitos são vistos em um contexto mais amplo e também como produto desse processo. Assim, a visualização tem seu papel na abstração, justamente, na questão da contextualização.

É importante salientar que o objetivo da representação simbólica, seja escrita ou falada é, conforme coloca Dreyfus (1991), facilitar a comunicação sobre o conceito. A partir da representação se pretende uma simplificação na abstração do conceito. Destaca-se a facilitação da abstração obtida a partir da representação visual.

Dreyfus (1991) coloca ainda que:

> Há uma dificuldade inerente na abstração: como podemos gerar estruturas mentais, que são frequentemente ligadas a imagens visuais, se elas devem representar relações que são separadas dos objetos concretos aos quais são ligadas originalmente? Se imagens visuais são encontradas, elas provavelmente serão de grande ajuda a estudantes empenhados na abstração. (DREYFUS, 1991, p. 38).

Ampliando questões do Pensamento Matemático Avançado temos o papel das definições e sua importância na formação dos conceitos. Shlomo Vinner (1991, p. 79) afirma que “Definições ajudam a formar a imagem conceitual, mas no momento em que a imagem está formada a definição se torna dispensável.” Assim, um certo excesso de importância dado às definições pode muitas vezes confundir o estudante e dificultar o trato de conceitos.

Nesse sentido Vinner (1991) considera que:

> [...] conceitos matemáticos deveriam ser adquiridos em um modo de formação de conceitos cotidiano e não em um modo técnico. A pessoa deveria começar com vários exemplos e contraexemplos através dos quais a imagem conceitual é formada. (VINNER, 1991, p. 80)

É preciso considerar a construção de conceitos matemáticos através de exemplos concretos, sem abandonar totalmente o formalismo. As notações matemáticas trazem em si a complexidade inerente a este tipo de representação, que pode ser subdividida em representações de menor complexidade, conforme ilustram Harel e Kaput (1991):

> Utilizando notações matemáticas, ideias complexas ou processos mentais podem ser divididos em pedaços e, portanto, representados por notações físicas, que por sua vez, podem ser manipuladas ou refletidas em novas ideias. (HAREL e KAPUT, 1991, p. 88)

O importante é que ideias complexas possam ser compreendidas sendo por meio de exemplos ou pela fragmentação em ideias menos complexas. A questão fundamental é que o estudante supere a dificuldade do conceito.

Dubinsky destaca a ineficiência das aulas feitas somente através da verbalização:

> Neste ponto, sobre linguagens, se generalizarmos, nos sugere que a aula tradicional em si, depende amplamente da transmissão linguística, não é muito útil para ajudar os estudantes a adquirirem conceitos matemáticos. Objetos e processos mentais, mesmo existindo na mente do professor, não podem ser transmitidos verbalmente, ou até mesmo através de imagens, a ouvintes. É necessário que o ouvinte interaja em uma construção ativa. (DUBINSKY, 1991, p. 121)

Assim, pode-se inferir que a interação com os conceitos matemáticos através das tecnologias é uma forma de construção para o ouvinte e desta maneira potencializar a compreensão visual e conceitual sobre o assunto estudado.

Dubinsky, ainda ressalta que a dificuldade é mais evidente quando a representação é mais complexa:

> Parece que a matemática se torna difícil para estudantes quando diz respeito a tópicos para os quais não existe uma representação simples, física ou visual. Dessa forma, computadores podem ajudar a prover representações concretas para muitos objetos e processos matemáticos importantes. (DUBINSKY, 1991, p. 104)

Neste momento é preciso levar em conta a época em que vivemos e considerar que não só computadores provêm representações concretas, mas também outros tipos de recursos computacionais, como *smartphones*. Assim, quando os autores citados colocam os computadores como protagonistas do Pensamento Matemático Avançado, podemos estender esta colocação a recursos computacionais diversos.

Dubinsky e Tall (1991) ressaltam a importância dos recursos computacionais para representações matemáticas:

> [...] uma forma de estimular a construção de conceitos é através de um computador ricamente dotado de *software* que dá corpo a poderosas ideias matemáticas para que o estudante possa manipulá-las e refletir a respeito. (DUBINSKY e TALL, 1991, p. 234)

O uso de recursos computacionais suscita novas reflexões sobre os temas estudados, possibilita a "concretização" de conceitos abstratos, ainda, como destacam Dubinsky e Tall (1991):

> Quando uma ideia abstrata é implementada ou representada no computador, então ela é concreta na mente, pelo menos em questão de existir. Não só o computador pode ser usado para desempenhar os processos representados pela ideia, mas ele mesmo pode ser manipulado. (DUBINSKY e TALL, 1991, p. 235)

Dubisnky e Tall, ainda colocam que:

> Evidências empíricas mostram que ele (o computador) é melhor sucedido em processos educacionais quando usado para realçar significados ou através de linguagem de programação incorporando processos matemáticos ou através do uso do ambiente computacional para exploração e construção de conceitos matemáticos. (DUBINSKY e TALL, 1991, p. 243)

Dado que, atualmente, o ambiente computacional extrapolou o computador e, com a Realidade Aumentada, pode inclusive estar no mundo real, é relevante o seu uso na construção de conceitos matemáticos que tem grande dependência de uma compreensão visual.

Entre os importantes aspectos do Pensamento Matemático Avançado, o de maior relevância para este trabalho diz respeito às dificuldades associadas à visualização matemática. Eisenberg (1991) ressalta que um certo tipo de matemática elementar não pode ser feita sem uma boa quantidade de habilidades de visualização.

Como coloca Eisenberg:

> Autores como Tall, Blackett, Rival e Thomas mostraram que estudantes podem desenvolver uma compreensão profunda de conceitos de funções de maior nível, desenvolvendo-os visualmente. Além disso, mostraram que quando é dada ênfase no desenvolvimento visual há maior retenção do que se os conceitos fossem desenvolvidos de forma analítica. (EISENBERG, 1991, p. 148)

Dado o exposto, pretende-se enfatizar os processos de visualização com o instrumental tecnológico, baseado nas tecnologias de Realidade Aumentada como meio de simplificar a construção de conceitos matemáticos.

Considerações finais

É esperado que o presente trabalho repercuta positivamente em práticas docentes e resultem em melhor entendimento e desempenho dos estudantes de Matemática e de demais cursos de Ciências Exatas, além de divulgar as potencialidades da utilização acadêmica da Realidade Aumentada, tecnologia que vem se popularizando em outras áreas. E, principalmente, refletir sobre a Matemática e as práticas adotadas no Ensino Superior, sob o embasamento das teorias do Pensamento Matemático Avançado.

Referências

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: TALL, D (Org.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991. Cap. 2.

DUBINSKY, E. Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In: TALL, D (Org.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991. Cap. 7.

DUBINSKY, E. TALL, D. Advanced Mathematical Thinking and the Computer. In: TALL, D (Org.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991. Cap. 14.

EISENBERG, T. Functions and associated learning difficulties. In: TALL, D (Org.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991. Cap. 9.

HAREL, G. KAPUT, J. The role of conceptual entities and their symbols in building advanced mathematical concepts. In: TALL, D (Org.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991. Cap. 6.

TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991a.

TALL, D. Intuition and Rigour: the role of visualization in the calculus. In W. ZIMMERMANN e S. CUNNINGHAM (Org.). **Visualization in Teaching and Learning Mathematics**. Washington: MAA, 1991b. Cap. 8

TALL, D. VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics, with Special Reference to Limits and Continuity. **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, p. 151 – 169, 1981. Disponível em: <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1981a-concept-image.pdf >. Acesso em 10 dez. 2018.

VINNER, S. The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics In: TALL, D (Org.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991. Cap. 5.