

## **TRIGONOMETRIA, RELAÇÃO ENTRE MOVIMENTOS CIRCULARES E GRÁFICOS COM A AJUDA DO GEOGEBRA**

Daniel Rodrigues Topanotti – danieltopa@gmail.com – UFRGS

### **Resumo**

Esse artigo relata a análise de uma abordagem investigativa de ensino de funções trigonométricas que prioriza a compreensão da relação entre movimentos circulares em diferentes velocidades com a formação gráfica gerada por esses movimentos. Com o auxílio do software Geogebra, diferentes movimentos foram criados, o que proporcionou a investigação gráfica por parte dos alunos. A atividade foi realizada no laboratório de informática onde, constantemente, houve investigação por parte dos alunos e intervenções significativas por parte do professor. Escolheu-se para essa pesquisa uma análise qualitativa embasada no processo descritivo das ações ocorridas em sala de aula. Para conhecer as características dessa abordagem, foi utilizado um estudo de casos. Após a atividade, os alunos conseguiram interpretar os principais movimentos gerados na circunferência e traduzi-los na sua forma gráfica. A análise mostra que os alunos não somente conseguiram desenvolver significados aos movimentos circulares, como também interpretaram corretamente situações cotidianas estabelecidas pelo professor ao fim do trabalho

**Palavras-chave:** Movimentos Circulares. Funções Trigonométricas. Investigação Matemática. GeoGebra.

### **Introdução**

Conforme Borba e Penteado (2003, p. 87), “no momento em que os computadores, enquanto artefato cultural e enquanto técnica, ficam cada vez mais presentes em todos os domínios da atividade humana, é fundamental que eles também estejam presentes nas atividades escolares”.

Trazer computadores para a sala de aula não significa somente utilizá-los como expositores, eles devem desconstruir o formato atual de transmissão de conhecimento centralizado no professor. Valente (2002) afirma que “o uso do computador para auxiliar o aprendiz a realizar tarefas sem compreender o que está fazendo é uma mera informatização do atual processo pedagógico”.

Nota-se que o ensino de funções trigonométricas, apresentado em muitos livros didáticos atuais, se limita a relacionar as transformações de funções na forma algébrica com a forma gráfica, deixando de lado o significado que elas carregam. Acredita-se que o significado de funções trigonométricas deveria receber importância maior.

O trabalho consiste em criar uma série de movimentos circulares com diferentes velocidades no GeoGebra e propor uma investigação gráfica. O objetivo dessa abordagem alternativa é a construção do significado de funções

trigonométricas, pois, na abordagem tradicional, muitas vezes esse objetivo não é alcançado.

O artigo aborda inicialmente como se deve desenvolver o ensino de trigonometria segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais. Posteriormente, faz-se um panorama sobre o uso das tecnologias em sala de aula, em especial, as potencialidades do software GeoGebra. Por fim, o artigo, em sua parte teórica, descreve as principais características de uma investigação matemática.

### **Trigonometria e PCNs**

As alterações curriculares propostas pelo programa Ensino Médio Inovador (BRASIL, 2009) visam a construção de uma escola mais ativa, criativa e que supere a mera memorização de conceitos. No campo da matemática, o programa recomenda que o estudo de funções, entre elas as trigonométricas, deva ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre grandezas, esboçando gráficos que modelem as relações e registrem tipos de crescimento e decrescimento.

Segundo os PCNs, a trigonometria deve estar ligada às aplicações evitando exageros em cálculos algébricos de identidades. O ensino deve enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise dos seus gráficos, assegurando a resolução de problemas que modelem fenômenos periódicos.

### **Uso das tecnologias**

No momento que a sociedade passa por transformações, se espera que o ensino promova algumas mudanças para se adequar às novas exigências.

Segundo Kenski (1997), a educação passa por um processo de renovação de espaço e de valores, tendo como ponto de partida todas as mudanças ocorridas em sociedade. Talvez a mudança mais impactante ocorrida na sociedade moderna foi a popularização dos computadores domésticos. A partir desse impacto, a educação passa por processos de transformação que perduram até os dias de hoje.

Na área do ensino em matemática, o programa GeoGebra surge como um dos principais softwares inovadores devido a sua potencialidade múltipla, atividades matemáticas diferenciadas passaram a ser desenvolvidas nesse programa.

## **Investigação Matemática**

Investigar em matemática significa observar e descobrir relações matemáticas existentes em determinada situação. Quando o professor propõe uma atividade investigativa em sala de aula, entre os seus objetivos está o desenvolvimento da autonomia, da capacidade de se envolver para atingir um objetivo, da habilidade em trabalhar em equipe, entre outros. Para Ponte (2015) os alunos aprendem quando mobilizam os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo.

Segundo Ponte (1999) o processo de investigação matemática se divide em quatro fases: A primeira abrange a exploração e reconhecimento da situação. Na segunda fase, há a formulação de conjecturas e a organização de dados. Na terceira há a execução de testes e na última há a construção do argumento e a demonstração do que se afirma.

Numa atividade investigativa o professor deixa de ser o transmissor de conhecimento e passa a orientar a atividade. Para que o aluno possa investigar, o professor deve deixá-lo exercer a autonomia agindo categoricamente, quando necessário, para orientar os alunos a aprender a investigar.

## **Análise dos dados**

Para conhecer as características dessa abordagem alternativa de ensino, bem como concluir se os alunos compreendem o significado das principais funções trigonométricas, foi utilizado um estudo de casos.

Nessa pesquisa, busca-se observar o conhecimento desenvolvido pelos alunos no processo investigativo proporcionado pelo GeoGebra.

Segundo Ponte (2006):

[...] no estudo de um caso, seja ele qual for, é sempre preciso dar atenção à sua história (o modo como se desenvolveu) e ao seu contexto (os elementos exteriores, quer da realidade local, quer de natureza social e sistémica que mais o influenciaram).

Por isso, a cada aula, o professor registrou, tanto as atividades ocorridas em sala de aula, quanto os avanços ou dificuldades apresentadas pelos alunos. Esses registros foram feitos em Diários de Campo e gravações de áudio em sala de aula.

Esse trabalho foi realizado em 10 períodos de 45 minutos.

## **Aplicação**

O trabalho iniciou com a construção do círculo trigonométrico no GeoGebra e um ponto que girava sobre essa circunferência ao passo de um ponto seletor. Conforme o ponto girava, era projetada a função seno sobre o eixo  $y$ .

Foi proposto às duplas que desenhasse um gráfico que representasse o comprimento da projeção em função do ângulo seletor. Após essa investigação, alguns questionamentos pré-estabelecidos foram apresentados aos alunos.

I) Definimos período de uma função periódica como o comprimento de uma oscilação completa em relação à variável  $x$ . Com base nessa definição, indique o período dessa função.

II) Pode compreender a imagem de uma função como os intervalos do eixo  $y$  onde a curva está representada. Indique a imagem dessa função.

Houve dúvidas iniciais sobre como fazer, talvez pela novidade em participar de uma atividade investigativa pela primeira vez, os alunos estavam acostumados com outras formas de aulas. Muitos ficavam inquietos com a sensação de incapacidade perante a investigação.

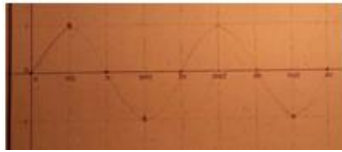
Segundo Borba (2015) o arranque da aula é um momento breve e crítico do processo investigativo, pois o professor deve garantir o entendimento dos alunos a respeito da tarefa e motivá-los para que possam desenvolver as investigações. Após novas orientações, os alunos começaram as atividades. Muito demoraram a decidir quais estratégias utilizariam para concluir o gráfico. Aos poucos alguns grupos mostravam boas ideias, como coletar algumas amostras.

Com as investigações iniciadas, o professor assumiu o papel de observador e passou a orientar o menos possível, para zelar pela autonomia das investigações. Inicialmente, alguns coletavam amostras que não era possível avaliar ao certo o comprimento da projeção. Por exemplo, observar o comprimento da projeção quando o ponto seletor estivesse marcando  $20^\circ$ ,  $55^\circ$  ou  $78^\circ$ .

Aos poucos alguns foram percebendo que existiam valores na circunferência que poderiam ser explorados com mais significado, como os pontos de extremidade.

Os alunos utilizavam esses pontos para traçar o gráfico e isso ficou evidenciado no trabalho de muitos deles. Podemos ver o exemplo abaixo.

**Figura 1 – Gráfico Seno**



É possível observar que a dupla que apresentou o gráfico acima utilizou como referência os pontos de extremidades, e eles foram decisivos na construção do gráfico.

O mesmo foi observado no áudio da dupla 2:

*Aluna 1: quando o ângulo é 0 o valor é 1, quando o ângulo é  $\pi$  o valor também é 1.... ta certo isso?*

*Aluna 1: ah, mas é a altura..... entendeu?*

*Aluna 2: ta ta, saquei, o comprimento é 0 para  $0^\circ$ , 1 para  $90^\circ$ , 0 para  $180^\circ$ , -1 para  $270^\circ$  e 0 para  $360^\circ$ .*

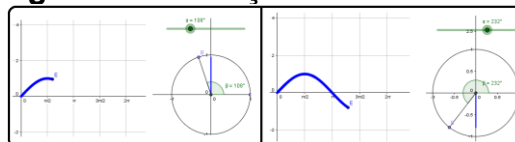
*Aluna 1: espera, to anotando.*

O diálogo acima termina com a estratégia elaborada pela dupla em utilizar os pontos extremos para traçar o gráfico. É possível identificar as duas primeiras fases que caracterizam um processo investigativo, segundo ponte. Inicialmente as alunas reconhecem a situação para, então, formularem uma conjectura.

Em relação às perguntas, os alunos não tiveram problemas em indicar o período e a imagem da função.

Após responder as perguntas os alunos seguiram o roteiro com orientações de correção. Os alunos programaram uma nova partícula para construir o gráfico na janela de visualização 2. Na medida em que o ponto se deslocava sobre a circunferência na janela de visualização 1, o novo ponto traçava o gráfico na janela de visualização 2.

**Figura 2 – Correção da Atividade 1.**



Percebe-se a última fase do que caracteriza um processo investigativo segundo Ponte, a construção do argumento e a demonstração do que se afirma.

A atividade 2 consistia em construir uma nova partícula com o dobro da velocidade para girar na mesma circunferência com a partícula anterior.

Pode-se observar a investigação de uma das duplas através do diálogo abaixo:

*Aluna 1: Vai chegar a um..... vai ser antes de  $90^\circ$*

*Aluna 2: para, espera, para ali o seletor..... vai na mão...*

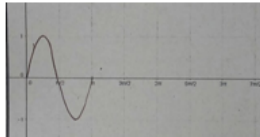
*Aluna 1: quando é  $90^\circ$  já é zero....quando é  $45^\circ$  é 1.*

*Aluna 1: ta, vai ser igual só que pela metade.*

Pode-se observar pelo diálogo que a dupla concluiu corretamente que o aumento da velocidade ocasionaria diminuição no comprimento de onda.

Abaixo é possível observar o gráfico final dessa dupla.

**Figura 3 – Gráfico da Partícula com dobro da Velocidade.**



Após a investigação do novo gráfico, os alunos responderam as seguintes perguntas:

II) Qual o período dessa nova função?

III) Qual a imagem dessa nova função?

A compreensão e a visualização do objeto que estava em investigação fizeram com que todos as duplas respondessem as perguntas corretamente.

Após a resolução do questionário, as duplas foram orientadas a construir a correção da tarefa. Esse é o momento onde o professor associa a nova situação prática explorada pelos alunos com a sentença  $y = \sin(2x)$ .

Uma das motivações em buscar significados com essa metodologia alternativa é verificada quando, na forma tradicional, onde há somente a associação entre a forma algébrica e a forma gráfica, os alunos acreditam que a função  $y = \sin(2x)$  tem o dobro do período da função  $Y = \sin(x)$ . Nessa abordagem investigativa, nenhum grupo desenhou o gráfico com o comprimento de onda maior que o anterior.

Para dar início à atividade 3, era necessário um ponto com metade da velocidade do ponto seletor. Após a realização da atividade anterior, antes mesmo alterar a velocidade do ponto, ficou evidente para alguns alunos o novo gráfico teria o dobro do comprimento de onda.

Após algumas observações, os alunos concluíram o gráfico corretamente. Abaixo encontra-se o registro do gráfico encontrado por uma das duplas:

**Figura 4 – Gráfico da Partícula com Metade da Velocidade .**



Para a atividade 3 foram feitas 2 perguntas sobre a nova função:

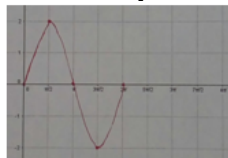
- II) Qual o período dessa nova função?
- III) qual a imagem dessa nova função?

Não houve surpresas, os alunos haviam compreendido bem o conceito de período e imagem e já apresentavam respostas convictas.

Para corrigir a atividade 3, assim como nas atividades anteriores, foi necessário relacionar a situação prática com a sentença  $y=\text{sen}(\alpha/2)$ .

A próxima investigação se referia a mudanças ocorridas no raio da circunferência. Foi construída uma circunferência concêntrica à circunferência anterior com o dobro do raio. Sobre essa circunferência, foi criado um novo ponto que girava com a mesma velocidade da partícula da circunferência menor. Veja o resultado de um dos gráficos resultantes abaixo:

**Figura 5 – Gráfico da Partícula que Gira com o Dobro do Raio**



Vejamos o diálogo de uma das duplas:

- Aluna 1: ta, olha ele vai la em cima.*
- Aluna 1: o gráfico tem que ir até o 2.*
- Aluna 2: ta e depois...*
- Aluna 2: ele vai até o -2 também, olha.*
- Aluna 1: e o período não muda nada, né?*
- Aluna 1: ... é não muda, não muda..*

Após a construção do gráfico, cada dupla fez a correção no Geogebra. Nesse momento houve a associação entre o novo movimento estudado e a sentença  $y=2\text{sen}(x)$ .

Após as correções, as duplas tinham algumas perguntas a serem respondidas, veja abaixo:

- II) *Essa alteração muda o período da curva? Se sim, diga o novo período*
- III) *Essa alteração muda a imagem da função? Se sim, diga a nova imagem.*
- IV) *O que aconteceria com o gráfico se criássemos outro círculo concêntrico com metade do raio da circunferência trigonométrica?*
- V) *Explique o que ocorre com o gráfico da função  $y = k \cdot \text{sen}(\alpha)$  para  $k > 1$  e  $0 < k < 1$ .*

Não houve dificuldades para responder as perguntas anteriores.

A próxima investigação era sobre deslocamento linear. Os alunos construíram um novo ponto sobre a circunferência trigonométrica com a mesma velocidade do ponto inicial, entretanto esse novo ponto estava  $\pi/2$  deslocado a frente.

Esse momento foi fundamental para a observação, pois uma das motivações do professor para a realização desse trabalho com foco no significado era justamente o fato dos alunos acreditarem que a função  $y = \text{sen}(x + \pi/2)$  tinha um deslocamento horizontal para a direita. Além disso, alguns alunos acreditavam que essa função tinha alteração de período, pois mecanizaram uma relação errada onde se formava a igualdade  $x + \pi/2 = 2\pi$  e isolava-se o  $x$  para encontrar o período.

Após a investigação, os alunos corrigiram seu gráfico no GeoGebra e relacionaram a investigação com a sentença  $y = \text{sen}(x + \pi/2)$ . Além disso, responderam as seguintes perguntas:

- II) *Essa alteração muda o período da curva? Se sim, diga o novo período*
- III) *Essa alteração muda a imagem da função? Se sim, diga a nova imagem.*
- IV) *Quais as alterações no gráfico dessa partícula deslocada em relação à partícula original?*
- V) *Explique o que ocorreria com o gráfico das funções  $y = \text{sen}(\alpha + \pi)$ ,  $y = \text{sen}(\alpha - \pi/2)$ ,  $y = \text{sen}(\alpha + \pi/2)$ .*

Em relação às perguntas II e III, não houve dificuldades, todas as duplas conseguiram responder que não havia alteração de período e não havia alteração de imagem. Essas conclusões mostram uma grande evolução ao ensino tradicional, onde frequentemente os alunos acreditam que há alteração no período da curva.

Em relação à pergunta IV, tivemos muitos alunos que responderam que a curva teve outro formato, ou ficou semelhante à curva da função cosseno.



Nenhum aluno respondeu que houve um deslocamento horizontal para a esquerda. O professor se deu conta que a atividade proposta permitia investigar o novo gráfico, mas não era sugestiva a conclusões como essas.

Em relação a pergunta V, parte das duplas editaram o ponto na janela de visualização 2, utilizada para as correções, e observaram o gráfico resultante nas formas  $y = \sin(\alpha + \pi)$ ,  $y = \sin(\alpha - \pi/2)$ ,  $y = \sin(\alpha + \pi/2)$ .

Para a próxima e última investigação, se referia ao deslocamento da circunferência verticalmente. Para isso, foi necessária a construção de um novo círculo centrado nos pontos (0,1).

Essa investigação se mostrou bastante tranqüila, as duplas compreenderam rapidamente que seria a mesma curva deslocada verticalmente.

Os alunos após concluírem suas investigações, efetuaram a correção no GeoGebra e relacionaram a situação prática com a sentença  $y=1+\sin(x)$ .

Após a correção, as seguintes perguntas foram feitas aos alunos:

*II) Essa alteração muda o período da curva? Se sim, diga o novo período*

*III) Essa alteração muda a imagem da função? Se sim, diga a nova imagem.*

*IV) O que aconteceria com o gráfico se direcionássemos o centro da circunferência para o ponto (0, -1)?*

*V) Explique o que ocorreria com o gráfico da função  $y = k + \sin(\alpha)$  para qualquer  $k$  tal que,  $k \neq 0$  e  $k \neq 1$ .*

Não houve dificuldade nas perguntas, com a manipulação do GeoGebra, os alunos respondiam acertadamente as perguntas

Por falta de tempo, o professor trabalhou as transformações gráficas da função cosseno de forma expositiva com a ajuda do GeoGebra e do data show.

Ao fim do trabalho o professor trabalhou com seus alunos uma lista de exercícios com contextualizações. O professor observou que os alunos conseguiram interpretar e associar os movimentos estudados às situações práticas apresentadas nas questões.

## **Conclusão**

A sociedade evoluiu acentuadamente, como nunca antes se vira em um espaço de tempo tão pequeno. Com essa evolução, novas habilidades se fizeram necessárias para suprir novas necessidades que surgiram justamente a partir da popularização dos computadores.

Hoje em dia, formar nossos alunos com habilidades puramente de execução, sem que os mesmos compreendam integralmente determinados assuntos, dificulta a inserção delas na sociedade moderna que cada vez mais utiliza o computador para essas tarefas práticas.

Imagine o quanto deve ser complicado para um aluno memorizar todos os movimentos da sentença  $y=a+b\text{sen}(cx+d)$  sem compreender quais situações essas funções modelam. Partindo dessa inquietação o professor estabeleceu essa atividade investigativa onde o aluno interpreta os movimentos gerados pelo computador que são semelhantes aos encontrados na realidade.

A metodologia investigativa adotada nesse trabalho desenvolve habilidades sócio-afetivas indispensáveis nos dias de hoje. Na exploração dos gráficos, os alunos além de aprenderem funções trigonométricas e criarem significados aos diferentes movimentos de partículas, desenvolveram a autonomia e a habilidades de trabalhar em equipe, que são fundamentais nos dias de hoje e deve ser papel da escola desenvolvê-las.

A análise dos dados mostra que os alunos não somente desenvolveram significados aos movimentos circulares, como também interpretaram corretamente situações cotidianas estabelecidas pelo professor ao fim do trabalho através de exercícios.

Por isso o professor acredita que o trabalho investigativo alcançou os objetivos estabelecidos nessa dissertação. Os alunos desenvolveram significados acerca dos movimentos circulares e, com eles, interpretaram corretamente situações práticas contidas no cotidiano.

## Referências

- BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. *Informática e Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autentica, 2015.
- BORBA, M.C.; VILLARREAL, M. E. *humans-eith-media and the reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. New York: Springer, 2005.
- BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *Características da investigação qualitativa*. In: *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto, Porto Editora, 1994. p. 47- 51.
- KENSKI, Vani Moreira. *O Ensino e os recursos didáticos em uma sociedade cheias de tecnologias*. In: *Didática: O ensino e suas relações*. Ilma P. Alencastro Veiga (org.). Campinas SP. Papirus, 1997.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio*. Ministério da Educação (MEC). Programa Ensino Médio Inovador, 2013.
- PONTE, João Pedro da. *Investigação Matemática na Sala de Aula*: Autêntica, 2015.
- PONTE, J. P., FERREIRA, C., VARANDAS, J. M., BRUNHEIRA, L., & OLIVEIRA, H. *A relação professor-aluno na realização de investigações matemáticas*. Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999.
- PONTE, João Pedro da. Estudos de casos em educação matemática. *Bolema*, Rio de Janeiro: n. 25, p. 105-132, 2006.
- VALENTE, José Armando. *O computador na Sociedade do Conhecimento*. Campinas SP: Nied, 2002.